

**KOLEKTIVNO PONAŠANJE I SAMOORGANIZACIJA U MREŽA...****By: Aladin Crnkić**As of: Dec 10, 2018 8:42:34 PM  
33,499 words - 47 matches - 23 sources

Similarity Index

**2%**

Mode: Similarity Report ▼

**paper text:**

UNIVERZITET CRNE GORE PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET Aladin Crnkić KOLEKTIVNO PONAŠANJE I SAMOORGANIZACIJA U MREŽAMA POVEZANIH OSCILATORA -DOKTORSKA DISERTACIJA- Podgorica, 2019.  
UNIVERSITY OF MONTENEGRO FACULTY OF MATHEMATICS AND NATURAL SCIENCES Aladin Crnkić COLLECTIVE BEHAVIOR AND SELF-ORGANIZATION IN NETWORKS OF COUPLED OSCILLATORS -PHD THESIS- Podgorica, 2019.

**Podaci i informacije o doktorantu Ime i prezime:** Aladin Crnkić **Datum i mjesto rođenja:**

12

23.04.1987. godine,

Bihać, Bosna i Hercegovina Naziv završenog postdiplomskog studijskog programa i godina završetka: Matematika i informatika, 2013. Podaci i informacije o mentoru Ime i prezime: Vladimir Jaćimović Titula: doktor matematičkih nauka Zvanje: redovni profesor Naziv univerziteta i organizacione jedinice: Univerzitet Crne Gore, Prirodno-matematički fakultet Članovi komisije: Dr Vladimir Jaćimović, red. prof. PMF-a, Univerzitet Crne Gore Datum odbrane: Po daci o doktorsko j disertaciji Naziv doktorskih studija: Matematika, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet Crne Gore Naslov disertacije: Kolektivno ponašanje i samoorganizacija u mrežama povezanih oscilatora Rezime: Ova teza je posvećena primjenama klasičnih matematičkih teorija na izučavanje fenomena samoorganizacije u kompleksnim sistemima. Kao paradigmatican okvir za opisivanje ovakvih kompleksnih sistema je ra- zmotren klasični model Kuramoto povezanih oscilatora, kao i ekstenzija ovog modela na sferu  $S^3$  (neabelov model Kuramoto). Koristeći aparat Komple- ksne analize i Geometrije, izučeni su prvi integrali i dinamika globalnih pro- mjenljivih u ovim sistemima. Predložene su primjene ovih teorijskih rezulta- ta na izučavanje kompleksnih mreža, klasterizaciju podataka i koordinaciju u sistemima sa više agenata. Ključne riječi: Model Kuramoto, Möbiusove transformacije, dvo- razmjera, kompleksna mreža, srednje polje, detekcija zajednica, direkciona statistika, neabelov model Kuramoto, konsenzus, adaptivne sinapse Naučna oblast: Uža naučna oblast: UDK bro j: 2 Information on the PhD thesis Course of study:

**Mathematics, Faculty of Mathematics and Natu- ral Sciences, University of**

22

Montenegro Thesis title: Collective behavior and self-organization in networks of coupled oscillators Summary: This thesis is devoted to applications of some classical mathematical theories to the study of self-organization phenomena in co- mplex systems. As a paradigmatic framework for mathematical description of such systems, we consider the classical Kuramoto model of coupled osci- llators, as well as an extension of this model to the 3-sphere (non-Abelian Kuramoto model). Using the apparatus of Complex Analysis and Geometry, we study the constants of motion and the

dynamics of global variables in these systems. Furthermore, we propose several applications of these theoretical results to community detection in complex networks, data clustering and coordination in multi-agent systems. Key words: Kuramoto model, Möbius transformation, cross ratio, complex network, mean field, community detection, Directional Statistics, non-Abelian Kuramoto model, consensus, adaptive synapses Scientific field: Science topic: UDC: 3

Predgovor Prvi poznati zapisi o fenomenu sinhronizacije povezanih oscilatora datiraju od XVII vijeka i pisama poznatog holandskog fizičara Huygensa [42]. Huygens je primijetio da se dva sata s klatnima, okačena na istom zidu, sinhronizuju u istoj fazi (ili u antifazi) nakon nekog vremena. On je ovaj fenomen u svojim pismima opisao kao "čudna simpatija". U XX vijeku je detaljno izučavana sinhronizacija u populacijama s velikim brojem oscilatora [11, 78]. Ovakvi sistemi opisuju različite procese u fizici i biologiji. Winfree [105] je u svojim radovima dao matematičku formulaciju prvog modela koji pokazuje fenomen sinhronizacije. Nakon njega, japanski fizičar Kuramoto je 1975. godine uveo najpopularniji model ove vrste [52]. Model Kuramoto [52] opisuje veliku populaciju međusobno povezanih faznih oscilatora (amplituda oscilacija se zanemaruje) s globalnim poparnim vezama, tj. pretpostavlja se da su veze između svakog para oscilatora iste. Ovaj model već decenijama služi kao paradigma za izučavanje kolektivnog ponašanja i samoorganizacije u velikim populacijama jedinki s poparnim interakcijama, koje mogu imati za posljedicu fazne prelaske (u kontekstu ovog modela, to je sinhronizacija oscilatora). Nakon prvobitne formulacije modela Kuramoto, nekoliko varijacija, ekstenzija i primjena ovog modela su detaljno proučavane u literaturi. Acebrón i ostali [2] su 2005. godine objavili prvi pregledni rad o modelu Kuramoto. Razmatrane su varijacije modela Kuramoto s različitim funkcijama veze, kao na primjer, veza s faznim pomakom (model Kuramoto-Sakaguchi) [85], veze s kašnjenjem [22, 107] ili veze koje su pod uticajem šuma [10, 107], itd. O ostalim varijacijama vidjeti pregledni rad [2]. Ideja o primjeni modela Kuramoto u proučavanju kompleksnih mreža je ispitana od 2005. do 2007. u radovima [6, 7, 71]. U ovim radovima je pokazano da proces sinhronizacije otkriva važne informacije o topologiji mreže. Ova ideja se nastavlja dalje koristiti u nekoliko radova u kojima se proučavaju svojstva mreže posmatrajući proces sinhronizacije u njoj [13, 54, 59]. Također, važno je napomenuti da je model Kuramoto korišten i predlagan i za klasteriranje multivarijantnih podataka [70, 94].

Već Kuramoto je primijetio da se u ovakvim sistemima, kao posljedica poparnih interakcija, uspostavlja tzv. srednje polje [52, 95]. Relativno nedavni napredak (2008-2009) pruža objašnjenje niskodimenzionalne dinamike i efekta srednjeg polja u modelu sa identičnim oscilatorima (svi oscilatori imaju istu svojstvenu frekvenciju) i globalnim (svako sa svakim) povezivanjem [63, 74, 79]. Ovo objašnjenje je dato u terminima Teorije grupa i Kompleksne analize. Pokazano je da se dinamika velikih populacija globalno povezanih oscilatora može reducirati na niskodimenzionalnu podmnogostrukost (rezultati Watanabe-Strogatz i Ott-Antonsena) [74, 75, 100, 101]. Marvel i ostali [63] su opisali algebarsku strukturu koja stoji iza ove redukcije, a to je da se oscilatori kreću pod dejstvom grupe Möbiusovih transformacija koje čuvaju jediničnu kružnicu (tj. automorfizama jediničnog diska). Grupa Möbiusovih transformacija koje čuvaju jedinični disk zavisi od tri parametra koje su globalne promjenljive u modelu. Prvi integrali sistema (konstante kretanja) su određeni dvorazmjerom (engl. cross ratio). Jednu od najadekvatnijih ekstenzija klasičnog modela Kuramoto na više dimenzije je predložio australijski fizičar Max Lohe u svojim radovima [57, 58]. Model opisuje kolektivno kretanje međusobno povezanih uopštenih "oscilatora" (Kuramoto-Lohe oscilatori), čija stanja su zadana unitarnim matricama. Istraživači ga nazivaju neabelovim modelom Kuramoto (ili samo modelom Lohe). Ova terminologija naglašava najvažniju razliku između ovog i klasičnog modela Kuramoto, a to je da množenje nije komutativno na grupi unitarnih matrica. S ovim modelom se razrađuju nove paradigme kvantne sinhronizacije [5, 58]. Nedavno su istraživači u oblasti upravljanja prepoznali da je model Kuramoto (i neabelov model Kuramoto) povezan s algoritmima iz Teorije geometrijskog konsenzusa (engl. Geometric Consensus Theory) [46, 73]. Ovo zapažanje ukazuje na intrigantnu vezu između konsenzusa i univerzalnog

pri- rodnog fenomena sinhronizacije povezanih oscilatora [78]. Teorija geome- trijskog konsenzusa je nedavno razvijena poddisciplina u širokom polju di- stribuiranog i kooperativnog upravljanja koja se bavi zadacima konsenzusa i koordinacije na određenim neeuclidskim (prije svega na homogenim) prosto- rima [89, 90]. Paradigma za zadatke s konsenzusom je roj (engl. swarm) identičnih indi- vidua (agenata) koji komuniciraju kroz zadani neusmjereni povezani graf. U takvoj postavci se pokazuje da je zadatak konsenzusa minimizacija odgova- rajuće potencijalne funkcije. U prethodnim studijama razvijen je univerzalni konceptualni pristup za- dacima konsenzusa na homogenim prostorima. Međutim, konvergencija algo- ritama u velikoj mjeri zavisi od geometrije osnovnih prostora. Ipak postoji nekoliko univerzalnih rezultata u vezi s konvergencijom (anti)konsenzusnih 5 algoritama. Sarlette i Sepulchre su dokazali konvergenciju algoritama konse- nzusa i antikonsenzusa na široj klasi mnogostrukosti u slučajevima kada je komunikacijski graf kompletan ili neusmjerenostabla [89, 90]. Napomenimo da obje topologije mogu biti problematične u primjenama, jer je komple- tni graf često preskup, dok topologija stabla nije robusna. Nedavni radovi [56, 62] postigli su značajan napredak u razumjevanju algoritama konsenzusa na sferama preko proizvoljnih komunikacijskih grafova. Konkretno, u radu [62] je pokazano da je skup konsenzusa skoro globalno stabilan za rojeve na sferama s agentima koji komuniciraju preko neusmjerenog povezanog grafa. Izložimo strukturu disertacije. Disertacija se sastoji od šest glava. Na početku, u prvoj glavi predstavljamo model Kuramoto i dajemo pre- gled nedavnih istraživanja o niskodimenzionom ponašanju globalno poveza- nih oscilatora. U drugoj glavi se pokazuje da se Kato-Jones raspodjele [50], dobijene kao Möbiusova transformacija von Misesove raspodjele vjerovatnoća na kružnici, prirodno pojavljuju u proučavanju populacija povezanih oscilatora. U ovoj glavi se ističu određene relacije između direkcione statistike (engl. Directional Statistics) i kolektivnog kretanja povezanih oscilatora. Nakon toga, u trećoj glavi detektujemo kolektivno ponašanje oscilatora i karakterišemo kompleksne mreže koristeći statistiku Möbiusovih transfo- rmacija u mreži. To omogućuje da uvedemo neke nove (statističke) koncepte koji karakterišu mrežu. Posebno je predložen pojam koherentnosti mreže (ili podmreže). U trećem paragrafu ove glave se proučava nekoliko jednostavnih (slučajnih) grafova kako bi se ilustrovala važnost koncepata koji se uvode. U nastavku ove glave se uvodi matematički model srednjih polja u komple- ksoj mreži identičnih Kuramoto oscilatora. U ovom okviru, srednja polja u mreži su predstavljena skupom tačaka na jediničnom disku s hiperboličkom metrikom (Poincareov disk model). Ovaj skup tačaka karakteriše topologiju mreže. Prikazane su simulacije za neke slučajne i regularne grafove. U četvrtoj glavi se razmatra niskodimenziona dinamika u opštem neabe- lovom modelu Kuramoto [57, 58] međusobno povezanih uopštenih oscilatora na 3-sferi. Ako svi oscilatori imaju identične svojstvene uopštene frekvencije i veza je globalna, dinamika je u potpunosti određena s nekoliko globalnih promjenljivih. Pokazujemo da se ovi uopšteni oscilatori kreću pod dejstvom grupe GH (kvaternionskih) Möbiusovih transformacija koje čuvaju  $S^3$ . Situ- acija je ovdje analogna onoj u klasičnom modelu Kuramoto, ali ipak složenija jer umjesto kompleksne analize moramo koristiti elemente kvaternionske ana- lize. Objašnjavamo prve integrale kretanja koristeći kvaternionsku dvora- zmjeru. Globalne promjenljive zadovoljavaju određeni sistem kvaternionskih ODJ-a, koji je ekstenzija Watanabe-Strogatz sistema [101]. Ako je početna raspodjela oscilatora uniformna na  $S^3$ , pojavljuju se dodatne simetrije i di- 6 namika se može dalje ograničiti na invarijantnu (realnu) četverodimenzionu podmnogostrukost. Uz teorijski interes, ova studija može imati različite pri- mjene u nauci i inženjerstvu. U nastavku ove glave predlažemo novu metodu klasteriranja multivari- jantnih podataka predstavljenih kao vektori u  $R^n$ . Klasteriranje je vjerovatno najvažniji zadatak nenadgledanog učenja (engl. unsupervised learning), koji se bavi detekcijom strukture u kolekciji neobilježanih podataka [47, 48]. Naša metoda je zasnovana na procesu sinhronizacije u neabelovim modelima Ku- ramoto na  $U(n)$ . Fokusiramo se na slučaj  $n = 2$ , što daje sistem matičnih ODJ na  $SU(2)$  s grupnom mnogostrukosti  $S^3$ . Ovaj izbor podrazumjeva ograničenje dimenzije multivarijantnih podataka, tako

da u simulacijama istražujemo skupove podataka gdje su podaci predstavljeni s najviše šest atributa. U ovom pristupu svaki objekat odgovara jednom Kuramoto-Lohe oscilatoru na  $S^3$  i podaci su unešeni u matrice njihovih svojstvenih frekvencija. Jedna od važnih prednosti ovakvog pristupa je da se može prirodno prilagoditi klasteriranju multivarijantnih funkcionalnih podataka. Predstavljaju se rezultati simulacija za nekoliko ilustrativnih skupova podataka. U petoj glavi proučavamo konsenzus i antikonsenzus na 3-sferi kao zadatke minimizacije nekih funkcija. Ističemo da je za te funkcije metod gradijentnog spuska u suštini neabelov model Kuramoto s nultim svojstvenim frekvencijama. Ovo zapažanje nudi novi uvid u algoritme konsenzusa. Tokom ove glave većinom istražujemo slučaj na sferi  $S^3$ . Napomenimo da se analogni rezultati mogu navesti i za roj na  $S^1$  s kompletnim komunikacijskim grafom. Razlog tome jest da su to jedine sfere koje su Lie grupe. Dokazujemo da algoritam antikonsenzusa nad kompletnim grafom na  $S^3$  konvergira prema balansiranoj konfiguraciji ako je zadovoljen određeni blagi uslov o početnim pozicijama agenata. Ovaj uslov ukazuje na neočekivan odnos s nekim važnim konstrukcijama iz kompleksne analize. U istoj glavi analiziramo dinamiku roja na sferi s adaptivnim (zavisnim o stanju) interakcijama. Jedan princip za uvođenje sinapsi zavisnih o stanju inspirisan je klasičnim Hebbovim pravilom iz nauke o neuronima. Ovo pravilo postulira da parovi agenata čija su stanja bliska jedni drugima ojačavaju svoje sinapse (The cells that fire together, wire together). Model s anti-hebbovim pravilom može pokazati različite stabilne formacije ili oscilatorno ponašanje u zavisnosti od parametara sistema. Dokazujemo da roj teži ka stabilnoj ravnoteži pod uslovom da je parametar sistema dovoljno velik. Na kraju ove glave prikazani su neki rezultati simulacija koji ilustruju primjenu ovih teorijskih rezultata na koordinaciju rotirajućih tijela u 3D prostoru. Ovo se vrši preslikavanjem trajektorija iz  $S^3$  u specijalnu ortogonalnu grupu  $SO(3)$ . Konačno, u osmoj glavi se izvlače neki zaključci i postavljaju neka otvorena pitanja za daljnja proučavanja. Cjelokupni materijal je podijeljen na glave, glave su podijeljene na paragrafe a neki paragrafi su podijeljeni na potparagrafe. Oznaku paragrafa čine dva broja. Prvi ukazuje na glavu, a drugi na redni broj paragrafa u toj glavi. Potparagraf je označen s tri broja, od kojih prva dva određuju broj paragrafa (sadrži oznaku glave kome paragraf pripada) a treći je broj potparagrafa. Numeracija formula, teorema, lema, definicija je standardna. Tokom doktorskih studija i rada na izradi doktorske disertacije, u časopisima koji se nalaze na SCI/SCIE listi, objavljeni su sljedeći radovi: • Crnkčić, A., Jaćimović, V.:

**Swarms on the 3-sphere with adaptive synapses: Hebbian and anti-Hebbian learning rule. Systems & Control Letters,** 4

Vol. 122, pp. 32–38 (2018), • Crnkčić, A., Jaćimović, V.: Data clustering based on quantum synchronization.

**Natural Computing,** <https://doi.org/10.1007/s11047-018-9720-z> 7

(2018), • Crnkčić, A., Jaćimović, V.: Consensus and balancing on the three-sphere.

**Journal of Global Optimization,** <https://doi.org/10.1007/s10898-018-0723-1> 3

(2018), •

**Jaćimović, V., Crnkić, A.: Low-dimensional dynamics in non-Abelian Kuramoto model on the 3-sphere. Chaos:**

3

**An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, Vol. 28, No. 8,**

20

pp. 083105 (2018), • Jaćimović, V., Crnkić, A.:

**Modelling mean fields in networks of co-upled oscillators. Journal of Geometry and Physics,**

6

Vol. 124, pp. 241–248 (2018), •

**Jaćimović, V., Crnkić, A.: Collective motions of globally coupled oscillators and some probability distributions on circle. Physics Letters A,**

6

Vol. 381, No. 24, pp. 1989–1994 (2017), •

**Jaćimović, V., Crnkić, A.: Characterizing complex networks through statistics of Möbius transformations. Physica D: Nonlinear Phenomena, Vol. 345,**

11

pp. 56–61 (2017), te jedan rad na konferenciji čiji je zbornik indeksiran u bazi Scopus: • Crnkić, A., Jaćimović, V.: Exploring complex networks by detecting collective dynamics of Kuramoto oscillators.

**VIII International Conference on Optimization and Applications (OPTIMA-2017), CEUR Workshop Proceedings, Petrovac, Montenegro**

18

(2017). 8 Rezultati ovih radova su korišteni prilikom izrade ove teze. Neki od rezultata su predstavljeni i na međunarodnim konferencijama OPTIMA-2017 i OPTIMA-2018. Na kraju se iskreno zahvaljujem profesoru Vladimiru Jaćimoviću na postavljenim zadacima, pomoći i savjetima pruženim u toku izrade ove disertacije. 9 Izvod iz teze Fenomen sinhronizacije u velikim populacijama povezanih oscilatora je predmet intenzivnih istraživanja u fizici, biologiji, hemiji i društvenim naukama. Najznačajniji model ove vrste, koji već decenijama služi kao paradigma za izučavanje kolektivnog ponašanja i samoorganizacije u velikim populacijama, je model Kuramoto. U ovoj disertaciji se proučava niskodimenziona dinamika tog modela i predstavljaju njegove nove primjene u različitim oblastima korištenjem

različitih matematičkih alata. Bolje objašnjenje dinamike i kolektivnog ponašanja povezanih oscilatora otkriva vezu s nekim rezultatima i objektima koji se proučavaju u direkcionoj statistici. Razmatran je model povezanih oscilatora sa šumom koji pokazuje da se Kato-Jones raspodjele prirodno pojavljuju u proučavanju populacija povezanih oscilatora. Predložen je konceptualni okvir za karakterizaciju kompleksnih mreža korištenjem statistike Möbiusovih transformacija. Ista ideja je upotrebljena u opisivanju srednjih polja i detekciji zajednica u kompleksnim mrežama povezanih oscilatora. Od strane mnogih naučnika trenutno se intenzivno proučava uopštenje modela Kuramoto na neke homogene prostore viših dimenzija. Jedno takvo uopštenje na sferi  $S^3$  je predstavljeno u ovoj disertaciji. Jednačine u tom modelu su kvaternionske Riccati-jeve diferencijalne jednačine. Proučava se niskodimenziona dinamika tog modela i predlažu se različite primjene u nauci i inženjerstvu. Detaljno je razmatrana njegova primjena u klasteriranju multivarijantnih podataka. U glavi 5 se udaljavamo od fizičkih teorija i razmatramo zadatke konsenzusa i koordinacije na neuklidskim mnogostrukostima. Proučava se konsenzus i balansiranje na sferi  $S^3$ , tako što se pokazuje da je algoritam gradijentnog spuska za funkciju (anti)konsenzusa u suštini neabelov model Kuramoto s nulnim svojstvenim frekvencijama. Razmatra se dinamika roja na sferi  $S^3$  s interakcijama zavisnim o stanju koje zadovoljavaju određene realizacije Hebbovog i antihebbovog pravila učenja. 10

**Abstract Synchronization phenomena in large populations of** coupled oscillators **are the subject** 10  
**of** intensive researches **in** Physics, Biology, Chemistry **and Social** sciences. **The** most  
 significant **model of**

this kind being used as a paradigm in studying the collective behavior and self-organization in large populations, is the Kuramoto model. In the present thesis we study low-dimensional dynamics in this model and its use in various fields by using different mathematics tools. A

**better understanding of dynamics and collective behavior of coupled oscillators** unveils relation 19  
**to**

some result of Directional statistics. In the Kuramoto model with noise the Kato-Jones distributions naturally arise. A conceptual framework for characterization of complex networks by using statistics of Möbius transformations was proposed. The same idea was used in describing mean fields and community detection in complex networks of coupled oscillators. Recently, researchers have intensively studied a generalization of the Kuramoto model on certain spaces of higher dimensions. An extension to the sphere  $S^3$  is presented in this thesis. The equations in that model are quaternionic Riccati differential equations. The low-dimensional dynamics in the model is studied and various applications in science and engineering proposed. We also propose an application to clustering of multivariate data. Chapter 5 moves away from physical theories and deals with consensus and coordination problems on non-Euclidean manifolds. The consensus and balancing on the sphere  $S^3$  is studied, showing that the gradient descent algorithm for the function of (anti-)consensus is essentially the non-Abelian Kuramoto model with zero intrinsic generalized frequencies. The

**swarm dynamics on the sphere  $S^3$  with state-dependent interactions that satisfy certain realizations of Hebbian and anti-Hebbian learning rules** 4

are analyzed. 11 Slike 1.1 Geometrijska interpretacija parametra poretka . . . . . 20 2.1 Evolucija funkcija gustoća za vrijednosti parametara

**$R = 0.135, D = 0.1, \mu = 0$  (dobija se  $\kappa \approx 2$ ) i  $K = -4, u = 0, \tau = 0$ .** 1

Raspodjela evoluirala prema stacionarnoj bimodalnoj konfiguraciji. . . . . 28 2.2 Evolucija funkcija gustoća za vrijednosti parametara

**$R = 0.135, D = 0.1, \mu = 0$  (dobija se  $\kappa \approx 2$ ) i  $K = -3, u = 0, \tau = 1$ .** 1

U slučaju veze s kašnjenjem, modalnost se mijenja naizmjenično (unimodalna u bimodalnu i obrnuto). . . . . 29 2.3 3.1 Evolucija funkcija gustoća za vrijednosti parametara

**$R = 0.185, D = 0.1, \mu = 0$  (dobija se  $\kappa \approx 3$ ) i  $K = 2, u = \pi^2, \tau = 0$ .** 1

Fazni pomak povećava asimetričnost raspodjele. . . . . 30 Raspodjela faza za tri grafa u momentu  $T = 3$  određena sistemom (3.1) s uniformno raspodjeljenim početnim fazama. Na osnovu OA ansatza i MMS principa slijedi da je raspodjela globalno povezane populacije (crna linija) Poissonovo jezgro s određenim parametrima. Kao što se i očekivalo, raspodjela faza za Erdős-Rényi graf s  $p = 0.9$  (crvena linija) je bliža Poissonovom jezgru nego s  $p = 0.5$  (plava linija). . . . . 38 3.2 Empirijska funkcija gustoće vjerovatnosti slučajnih promjenljivih  $X_N$  (prva kolona),  $-\log|X_N|$  (druga kolona) i  $Y_N$  (treća kolona) za tri različita modela: (a), (b), (c): Globalno povezana populacija (model 1); (d), (e), (f): Dvije perfektne zajednice jednakih veličina (model 2); (g), (h), (i): Dvije perfektne zajednice različitih (2 : 1) veličina. . . . . 40 3.3 Empirijska funkcija gustoće vjerovatnosti slučajnih promjenljivih  $X_N$  (prva kolona),  $-\log|X_N|$  (druga kolona) i  $Y_N$  (treća kolona) za tri različita ER grafa s  $N = 500$  čvorova: (a), (b), (c): ER graf s  $p = 0.9$ ; (d), (e), (f): ER graf s  $p = 0.5$ ; (g), (h), (i): ER graf s  $p = 0.1$ . . . . . 41 12 3.4 Empirijska funkcija gustoće vjerovatnosti slučajnih promjenljivih  $X_N$ ,  $-\log|X_N|$  i  $Y_N$  za Watts-Strogatz mrežu s  $N = 500$  čvorova i parametrima  $k = 50$  i  $p = 0.1$ . . . . . 42 3.5 Evolucija srednjeg polja na vremenskom intervalu  $t \in [0, 4]$  u populaciji od  $N = 500$  oscilatora s globalnom jačinom veze  $K = 2$ . . . . . 44 3.6 3.7 3.8 Srednja polja u ER grafu s  $d = 0.1$  u momentima  $T = 2, 25, 50$ . 47 Srednja polja u ER grafu s  $d = 0.9$  u momentima  $T = 2, 3, 4$ . . 47 Srednja polja u ER grafovima s

(a)  $d = 0.1$ , (b)  $d = 0.5$  i (c)  $d = 0.9$  u momentu  $T = 5$ .

2

..... 48 3.9 Srednja polja u WS grafovima s

$k = 250$  i (a)  $\beta = 0.1$ , (b)  $\beta = 0.5$  i (c)  $\beta = 0.9$  u momentu  $T = 5$ .

2

..... 48 3.10 Srednja polja u mreži koja sadrži dvije perfektno koherentne zajednice s jačinom veze unutar zajednica  $K = 0.675$  i između zajednica  $v = 0.325$  u momentima  $T = 50, 200, 250$ . . . . . 49 3.11 Slučajni graf s dvije zajednice. . . . . 52 3.12 Tačke u jediničnom disku su dobijene primjenom našeg algoritma na slučajni graf prikazan na slici 3.11. Svaka tačka odgovara četvorki čvorova. Dva klastera tačaka koja odgovaraju dvjema zajednicama su jasno vidljiva. . . . . 52 3.13 Slučajni graf s tri zajednice. Centralna zajednica je manja i posreduje između preostale dvije. . . . . 53 3.14 Čvorovi u mreži s tri zajednice su predstavljeni krugovima. Površina svakog kruga je inverzno proporcionalna stepenu korenspondencije čvora. Vidljivo je da čvorovi iz centralne zajednice imaju manji stepen korenspondencije. . . . . 53 4.1 Evolucija globalnog parametra poretka  $\rho$  (a) i ugaonih parametara poretka  $\rho\phi$  (puna linija) i  $\rho\psi$  (isprekidana linija) (b) za sistem (4.4) s funkcijom veze (4.12). Simulacija se izvodi za  $N = 100$  KL oscilatora, s jačinom veze  $K = 0.5$ . Početni uslovi su birani iz uniformne raspodjele na  $S^3$ . . . . . 62 4.2 Evolucija globalnog parametra poretka  $\rho$  (a) i ugaonih parametara poretka  $\rho\phi$  (puna linija) i  $\rho\psi$  (isprekidana linija) (b) za (4.4) s funkcijom veze (4.12). Simulacija se izvodi za  $N = 100$  KL oscilatora, s jačinom veze  $K = -0.5$ . Početni uslovi su birani iz von Mises-Fisherove raspodjele na  $S^3$  sa smjerom srednje vrijednosti  $\mu = (0.5, 0.5, 0.5, 0.5)$  i koncentracijskim parametrom  $\kappa = 2$ . . . . . 63 4.3 Evolucija globalnog parametra poretka  $\rho$  (a) i ugaonih parametara poretka  $\rho\phi$  (puna linija) i  $\rho\psi$  (isprekidana linija) (b) za (4.4) s funkcijom veze (4.13). Simulacija se izvodi za  $N = 50$  KL oscilatora, s jačinom veze  $K = 2$  i faznim pomacima  $\alpha = \beta = \pi/2$ . Početni uslovi su birani iz uniformne raspodjele na  $S^3$ . . . . . 63 4.4 Rezultati simulacija za skup podataka Iris flower: ukupan broj klastera se smanjuje od 150 na 2 (a) i globalni parametar poretka  $\det\hat{U}(t)$  se povećava (b). Jačina veze je podešena na  $K = 10$ . . . . . 70 4.5 Rezultati simulacija za skup podataka od 28 zemalja: ukupan broj klastera se smanjuje od 28 na 9 (a) i globalni parametar poretka  $\det\hat{U}(t)$  se povećava (b). Jačina veze je podešena na  $K = 10$ . . . . . 70 4.6 Rezultati simulacija za skup podataka Canadian meteorological data: algoritam je pronašao 3 velika klaster (crvene, žute i plave linije) i 4 odvojena klastera (crna, ljubičasta, siva i zelena linija). . . . . 71 4.7 5.1 Rezultati simulacija za skup podataka Key economic indicators data: algoritam je pronašao 1 veliki klaster (crne linije) i 4 odvojena klastera (plava, žuta, crvena i ljubičasta linija). . . . . 72 Model s Hebbovim učenjem (5.18), (5.20) s  $N = 10$  agenata. Vrijednost parametra:  $\varepsilon = 0.2$ . Nulte početne vrijednosti za sinapse  $w_{jk}(0) = 0$  i slučajne početne vrijednosti za  $q_j(0)$  smo birali u skladu s napomenom 5.9. (a) Skalarni proizvodi  $\langle x_j, x_k \rangle$  za neke  $j, k$  i (b) parametri poretka: globalni parametar poretka (crna linija), parametar poretka za ugao  $\phi$  (crvena linija) i parametar poretka za ugao  $\psi$  (žuta linija). . . . . 90 5.2 Model s antihebbovim učenjem (5.18), (5.21) s  $N = 4$  agenata. Vrijednost parametara:  $\varepsilon = 0.2$ ,  $\mu = 2$ . Početne vrijednosti su objašnjene u napomeni 5.9. (a) Skalarni proizvodi  $\langle x_j, x_k \rangle$  za neke  $j, k$  i (b) parametri poretka: globalni parametar poretka (crna linija), parametar poretka za ugao  $\phi$  (crvena linija) i parametar poretka za ugao  $\psi$  (žuta linija). . . . . 92 5.3 Model s



antihebbovim učenjem (5.18), (5.21) s $N = 5$ agenata. Vrijednost parametara: $\epsilon = 0.2$ , $\mu = 2$ . Početne vrijednosti su objašnjene u napomeni 5.9. (a) skalarni proizvodi $\langle x_j, x_k \rangle$ za neke $j, k$ i (b) parametri poretka: globalni parametar poretka (crna linija), parametar poretka za ugao $\phi$ (crvena linija) i parametar poretka za ugao $\psi$ (žuta linija). . . . .	93
5.4 Model s antihebbovim učenjem (5.18), (5.21) s $N = 5$ agenata. Vrijednost parametara: $\epsilon = 0.2$ , $\mu = 1$ . Početne vrijednosti su objašnjene u napomeni 5.9. (a) skalarni proizvodi $\langle x_j, x_k \rangle$ za neke $j, k$ i (b) parametri poretka: globalni parametar poretka (crna linija), parametar poretka za ugao $\phi$ (crvena linija) i parametar poretka za ugao $\psi$ (žuta linija). . . . .	93
5.5 Model s antihebbovim učenjem (5.18), (5.21) s $N = 6$ agenata. Vrijednost parametara: $\epsilon = 0.2$ , $\mu = 2$ . Početne vrijednosti su objašnjene u napomeni 5.9. (a) skalarni proizvodi $\langle x_j, x_k \rangle$ za neke $j, k$ i (b) parametri poretka: globalni parametar poretka (crna linija), parametar poretka za ugao $\phi$ (crvena linija) i parametar poretka za ugao $\psi$ (žuta linija). . . . .	94
5.6 Model s antihebbovim učenjem (5.18), (5.21) s $N = 6$ agenata. Vrijednost parametara: $\epsilon = 0.2$ , $\mu = 1$ . Početne vrijednosti su objašnjene u napomeni 5.9. (a) skalarni proizvodi $\langle x_j, x_k \rangle$ za neke $j, k$ i (b) parametri poretka: globalni parametar poretka (crna linija), parametar poretka za ugao $\phi$ (crvena linija) i parametar poretka za ugao $\psi$ (žuta linija). . . . .	94
15 Tab ele 3.1 H-koherentnost Watts-Strogatz grafova (jačina veze je $K = 7$ i $T = 3$ ). . . . .	50
3.2 Stepen korenspondencije slučajno izabranih čvorova u mreži koja se sastoji od tri zajednice. Jasno je da čvorovi koji pripadaju centralnoj zajednici (zajednica B) imaju manji stepen korenspondencije. . . . .	54
16 Sadržaj Predgovor 4 Izvod iz teze 10 Abstract 11 1 Uvod: Globalne promjenljive u idealnom modelu Kuramoto na $S^1$ 19 2 Model Kuramoto sa šumnim frekvencijama i neke vjerovatnosne raspodjele na kružnici 23 2.1 Uvod . . . . . 23 2.2 Povezani oscilatori i von Misesova raspodjela . . . . . 25 2.3 Model . . . . . 26 2.4 Dinamika parametara K-J raspodjela . . . . . 27 2.5 Evolucija oblika na invarijantnoj podmnogostrukosti K-J raspodjela . . . . . 28 2.6 Momenti. . . . . 31 3 Primjene modela Kuramoto na kružnici na detekciju zajednica i karakterizaciju kompleksnih mreža 32 3.1 Uvod . . . . . 32 3.2 Karakterizacija kompleksnih mreža pomoću statistike Möbiusovih transformacija . . . . . 33 3.2.1 Koncepti: koherentnost mreže, korenspondencija čvora 34 3.2.2 Slučajne mreže . . . . . 37 3.3 Modeliranje srednjih polja u mrežama povezanih oscilatora . . 42 3.3.1 3.3.2 3.3.3 Srednja polja u globalno povezanoj populaciji . . . . 43 Möbiusove transformacije u kompleksnoj mreži oscilatora 44 Srednja polja u kompleksnim mrežama Kuramoto oscilatora . . . . . 45 17 3.4 Detekcija zajednica u kompleksnim mrežama . . . . . 51 3.4.1 Algoritam . . . . . 51 3.4.2 Primjeri . . . . . 53 4 Ekstenzija modela Kuramoto na sferu $S^3$ i neke primjene 55 4.1 Uvod . . . . . 55 4.2 Globalne promjenljive u idealnom neabelovom modelu Kuramoto na $S^3$ . . . . . 56 4.2.1 Model povezanih uopštenih oscilatora na $S^3$ . . . . . 57 4.2.2 Niskodimenziona dinamika globalno povezanih uopštenih oscilatora na $S^3$ . . . . . 58 4.2.3 Dinamika u Hopfovima koordinatama i neke specijalne funkcije veze . . . . . 60 4.2.4 Uniformna početna raspodjela daje 4D dinamiku . . 64 4.2.5 Potencijalne primjene . . . . . 65 4.3 Primjena neabelovog modela Kuramoto na klasterizaciji podataka . . . . . 66 4.3.1 Algoritam . . . . . 67 4.3.2 Studije slučaja . . . . . 69 4.3.3 Klasteriranje funkcionalnih podataka . . . . . 71 5 Distribuirani algoritmi konsenzusa i koordinacije na sferama 74 5.1 5.2 Uvod . . . . . 74 Konsenzus i balansiranje na 3-sferi . . . . . 75 5.2.1 Konsenzus na $S^1$ . . . . . 76 5.2.2 Konsenzus na $S^3$ i $SO(3)$ preko neusmjerenih grafova . 77 5.2.3 Konsenzus na $S^3$ preko kompletnog grafa . . . . . 81 5.2.4 Antikonsenzus i balansiranje na $S^3$ . . . . . 86 5.3 Rojevi na 3-sferi s adaptivnim sinapsama . . . . . 88 5.3.1 5.3.2 5.3.3 Roj na $S^3$ s Hebbovim pravilom učenja . . . . . 89 Roj na $S^3$ s antihebbovim pravilom učenja . . . . . 92 Primjene i vizualizacija . . . . . 98 6	

Zaključak 100 Literatura 103 Biografija 112 18 Glava 1 Uvo d: Globalne promjenljive u idealnom mo delu Kuramoto na S 1 Synchronizacija u velikoj populaciji povezanih oscilatora je univerzalni fenomen s velikim brojem manifestacija u fizici i prirodnim naukama, te primjenama u inženjerstvu [78]. Ovakav paradigmatički model je 1975. godine predstavio Kuramoto [52]:  $\dot{\phi}_j = \omega_j + K \sin(\phi_j - \phi_j)$ ,  $j = 1, \dots, N$ . (1.1)  $K \sum_{i=1}^N$  Ovdje,  $N$  je ukupan broj oscilatora,  $\phi_j(t)$  i  $\omega_j \in \mathbb{R}$  je faza i svojstvena frekvencija  $j$ -tog oscilatora respektivno.  $K$  je globalna jačina veze, koja je ista za svaki par oscilatora. Također, može se uzeti u obzir i opšti oblik modela Kuramoto:  $\dot{\phi}_j = f e^{i\phi_j} + \omega_j + f^* e^{-i\phi_j}$ ,  $j = 1, \dots, N$ , (1.2) s globalnom kompleksnom funkcijom veze  $f = f(t, \phi_1, \dots, \phi_N)$ . Sistem (1.1) se dobija iz (1.2) za specifičan izbor funkcije veze:  $f = i \sum_{i=1}^N e^{-i\phi_i}$ . Napomenimo da oblik (1.2) uključuje različita uopštenja, kao što su veza s faznim pomakom (model Kuramoto-Sakaguchi), veza s kašnjenjem ili veza koje su pod uticajem šuma, itd. 19 Kuramoto je započeo analizu modela (1.1) uvodeći parametar poretka (engl. order parameter)  $r(t)$  i srednju fazu  $\mu(t)$  (vidjeti sliku 1.1), definisanu s:  $N r(t) e^{i\mu(t)} = \sum_{i=1}^N e^{i\phi_i(t)}$ . (1.3)  $\sum_{i=1}^N$  Sa parametrom poretka, model Kuramoto (1.1) je moguće zapisati u pogodnijem obliku. Da bismo to dobili, množimo obje strane jednačine 1.3 s  $e^{-i\phi_j}$ :  $N r e^{i(\mu - \phi_j)} = \sum_{i=1}^N e^{i(\phi_i - \phi_j)}$ ,  $j = 1, \dots, N$ . (1.4)  $\sum_{i=1}^N$  Imaginarni dijelovi od 1.4 su  $r \sin(\mu - \phi_j) = \sum_{i=1}^N \sin(\phi_i - \phi_j)$ ,  $j = 1, \dots, N$ ,  $\sum_{i=1}^N$  koji se mogu zamijeniti u (1.1). Na ovaj način, (1.1) postaje:  $\dot{\phi}_j = \omega_j + K r \sin(\mu - \phi_j)$ ,  $j = 1, \dots, N$ . (1.5) Slika 1.1: Geometrijska interpretacija parametra poretka Ovaj oblik otkriva efekt srednjeg polja globalne veze, koje djeluje tako što svi oscilatori žele da budu povezani na isto vanjsko polje  $\mu(t)$  sa zajedničkom jačinom veze  $Kr(t)$  (vidjeti [95]). Uz ovo svojstvo, klasični model Kuramoto je u isto vrijeme netrivialan i podložan matematičkoj analizi. Njegova intriga proizilazi iz činjenice da i srednja faza  $\mu(t)$  i jačina srednjih polja  $Kr(t)$  variraju s vremenom i zavise od stanja svih oscilatora u svakom trenutku. Pretpostavimo da je populacija homogena s globalnom vezom, tj. populacija u kojoj svi oscilatori imaju istu svojstvenu frekvenciju  $\omega_j \equiv \omega$ . Tada se (1.2) zapisuje kao:  $\dot{\phi}_j = f e^{i\phi_j} + \omega + f^* e^{-i\phi_j}$ ,  $j = 1, \dots, N$ . (1.6) Pojedinačni oscilatori u modelima (1.1)-(1.6) se zovu "Kuramoto oscilatori" (ili "sinusoidno povezani oscilatori"). Ovaj izraz se koristi da se naglasi kako: (a) su zanemarene amplitude oscilatora i (b) veza zavisi samo o prvim harmonikama  $e^{i\phi_j}$  i  $e^{-i\phi_j}$  (a ne o višim harmonikama). Početkom devedesetih godina su u nekoliko članaka predstavljani rezultati simulacija koji ukazuju na to da (1.6) naizgled pokazuje niskodimenzionu dinamiku, kao na primjer, dobivala su se neutralna stabilna rješenja poput tzv. splay stanja [34, 69, 97, 98]. 20 Ovi eksperimentalni zaključci su praćeni teorijskim rezultatom, a to je da su Watanabe i Strogatz u radovima [100, 101] predstavili posebnu transformaciju promjenljivih s kojom su redukovali (1.6) u trodimenzioni dinamički sistem i pronašli  $N - 3$  konstanti kretanja (WS system). Ovo je pokazatelj da takvi sistemi sadrže neke skrivene simetrije i dopuštaju mnoge konstante kretanja. Nadalje, 2008. godine, Ott i Antonsen su u radu [74] pokazali da u nekim slučajevima (1.1) dozvoljava mnoge konstante kretanja i izvodi niskodimenzionu dinamiku za veliko  $N$  i neke specijalne početne uslove  $\phi_j(0)$ ,  $j = 1, \dots, N$  (OA ansatz). Eksplicitno zadana ODJ koja opisuje evoluciju kompleksnog parametra poretka je izvedena ne samo za slučaj identičnih oscilatora ( $\omega_j \equiv \omega$ ), nego i u slučaju kada su svojstvene frekvencije  $\omega_j$  izabrane iz Cauchyjeve (Lorentzove) raspodjele (i nekih drugih raspodjela) na realnoj pravoj. Funkcija gustoće raspodjele faza  $\rho(\phi, t)$  evoluirala u invarijantnim niskodimenzionim podmnogostrukostima u prostoru svih funkcija gustoća. Rezultat Otta i Antonsena je naročito transparentan kada svi oscilatori imaju jednake svojstvene frekvencije. U tom slučaju se gustoća faza oscilatora razvija na dvodimenzionoj invarijantnoj podmnogostrukosti koja se sastoji od Poissonovog jezgra (vidjeti [84]). Međutim, treba naglasiti da OA ansatz vrijedi pod pretpostavkom da je početna raspodjela faza uniformna na  $[0, 2\pi]$ . U većini radova o ovoj temi usvaja se ova pretpostavka, uglavnom zato što daje posebno pogodnu kompleksnu ODJ za parametar poretka. Pored toga, ova pretpostavka o početnim fazama izgleda prilično prirodna u mnogim modelima. Početkom 2000-ih godina u radovima [63, 79] je postignut novi uvid u niskodimenziono ponašanje modela (1.2). Rad Marvela i ostalih [63] je posebno ilustrativan, jer nudi teorijsko

objašnjenje grupe ove niskodimenzione dinamike, tj. evolucija oscilatora je zadana dejstvom grupe Möbiusovih transformacija (ovaj rezultat ćemo ubuduće spominjati kao MMS princip). Da bi se to objasnilo, uvode se nove kompleksne promjenljive  $z_j(t) = e^{i\phi_j(t)}$  koji predstavljaju stanja oscilatora. U odsustvu veze, svaki oscilator vrši rotaciju na jediničnoj kružnici  $S^1$  u kompleksnoj ravni:  $\dot{z}_j = i\omega z_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ ,  $\omega \in \mathbb{R}$ . (1.7) Uvodeći zamjenu  $z_j(t) = e^{i\phi_j(t)}$  u (1.6) dobija se kompleksna Riccatijeva diferencijalna jednačina:  $\dot{z}_j = i(f z_j^2 + \omega z_j + f^-)$ ,  $j = 1, \dots, N$ , (1.8) s globalnom vezom  $f = f(t, z_1, \dots, z_N)$  i zajedničkom svojstvenom frekvencijom  $\omega \in \mathbb{R}$ . 21 Kompleksne Riccatijeve jednačine su usko povezane s Möbiusovim transformacijama u proširenoj kompleksnoj ravni. Pored toga, jednačina specifičnog oblika (1.8) čuva jediničnu kružnicu, tj. ako je  $z_j(0) \in S^1$ , tada  $z_j(t) \in S^1$  za svako  $t > 0$ . Ovo se lako potvrdi tako što se pokaže da  $z_j(0)z_j^-(0) = 1$  implicira  $\text{ddt}(z_j(t)z_j^-(t)) = 0$ . Opšta Möbiusova transformacija koja čuva  $S^1$  se može napisati u sljedećoj parametrizaciji:  $M(z) = 1 + \alpha e^{i\psi} z + \alpha e^{-i\psi} z^{-1}$ , (1.9) s parametrima  $\psi \in [0, 2\pi]$  i  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $|\alpha| < 1$ . Skup svih Möbiusovih transformacija koje čuvaju  $S^1$  je troparametarska podgrupa  $GC$  grupe svih Möbiusovih transformacija u kompleksnoj ravni. Marvel i ostali su pokazali da se oscilatori  $z_j$  kreću pod dejstvom grupe  $GC$ . Preciznije,  $z_j(t) = M_t(z_j(0))$  za svako  $t > 0$  i  $j = 1, \dots, N$ , gdje je  $M_t$  jednoparametarska familija Möbiusovih transformacija u  $GC$ . Društvom riječima, funkcija gustoće stanja oscilatora  $\rho(z, t)$  u svakom momentu  $t$  je odgovarajuća Möbiusova transformacija početne raspodjele  $\rho(z, 0)$  na  $S^1$ . Budući da (pod)grupa Möbiusovih transformacija koje čuvaju jedinični disk mogu biti parametrizirane s tri (realna) parametra, slijedi da  $\rho(z, t)$  evoluiraju na invarijantnoj trodimenzionoj podmnogostrukosti u prostoru raspodjela. Štaviše, parametri  $\psi$  i  $\alpha$  u (1.9) zadovoljavaju sistem koji su ranije dobili Watanabe i Strogatz [101]:  $\dot{\alpha} = i(f \alpha^2 + \omega \alpha + f^-)$ ;  $\dot{\psi} = f \alpha + \omega + f^- \bar{\alpha}$ . (1.10) Ova linija istraživanja donosi novu intrigu u proučavanju Kuramoto oscilatora (zajedno s tradicionalnim fokusom na sinhronizaciju frekvencije i faznim prelazima iz/uz koherentna stanja), a to su odnosi s hiperboličkom geometrijom, kompleksnom analizom i implikacije. 22 Glava 2 Model Kuramoto sa šumnim frekvencijama i neke vjerovatnosne raspodjele na kružnici 2.1 Uvod Model Kuramoto je trajno stimulisao interesovanje naučnika u niskodimenzionom ponašanju velikih populacija globalno povezanih oscilatora. Izučavanjem napredak u ovoj temi postignut je u sljedećim radovima [63, 74, 79]. Otkriveno je da se dinamika velikih populacija globalno povezanih oscilatora može reducirati na niskodimenzione podmnogostrukosti (WS system, OA ansatz i MMS princip). MMS princip je dodatno poboljšao Ott-Antonsenov rezultat, a to je da rješenja u obliku Poissonovog jezgra nastaju kao Möbiusove transformacije kružne uniformne raspodjele. Zbog toga, za slučaj globalno povezane populacije, MMS princip je uopštenje OA ansatza za povoljnu početnu raspodjelu faza. Međutim, za razliku od OA ansatza, MMS princip ne obuhvata (bar ne do sada) slučaj neidentičnih oscilatora. Sada ukratko ističemo neke analogne koncepte, a to je da su raspodjele u obliku Poissonovog jezgra već dugo proučavane kao "umotane" (engl. wrapped) Cauchyjeve raspodjele. U radu [64] je uvedena reparametrizacija umotanih Cauchyjevih raspodjela korištenjem kompleksnih brojeva, koji su predstavljani kao Möbiusove transformacije kružne uniformne raspodjele. Ova analogija ukazuje na to da otkrića u direkcionoj statistici mogu biti korisna u objašnjenju dinamike velikih populacija povezanih oscilatora. Konkretno, mogli bi se zapitati koje druge kružne raspodjele (osim kružne uniforme i 23 umotane Cauchyjeve raspodjele) nastaju u dinamici povezanih oscilatora. Druga familija raspodjela, koja je centralna u direkcionoj statistici, se sastoji od von Misesovih raspodjela  $v_M(\mu, \kappa)$ . Njena funkcija gustoće vjerovatnoće je zadana s (vidjeti [31, 60]):  $f_{v_M}(\phi) = \frac{1}{2\pi I_0(\kappa)} \exp\{\kappa \cos(\phi - \mu)\}$ ,  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ , (2.1) gdje je  $I_0$  modificirana Besselova funkcija prve vrste reda 0. U proučavanju povezanih oscilatora von Misesova raspodjela se spominje uglavnom u radovima o statističkoj detekciji i procjeni veza između oscilatora koji su pod uticajem šuma, vidjeti [3, 15, 17]. U našem kontekstu je važnije da se von Misesove raspodjele pojavljuju kao stacionarne raspodjele u nekim jednostavnim modelima povezanih oscilatora sa šumnim identično raspoređenim frekvencijama, vidjeti paragraf 2.2. Kato i Jones su 2010. godine opisali novu familiju raspodjela

vjerovatnoća na kružnici, dobijenu kao Möbiusova transformacija von Misesove raspodjele. Za fiksnu srednju vrijednost  $\mu$  i koncentraciju  $\kappa$  u von Misesovoj raspodjeli, ova familija čini trodimenzionu podmnogostrukost u prostoru raspodjela. U nastavku, pozivat ćemo raspodjele koje pripadaju ovoj familiji kao K-J raspodjele. U ovoj glavi proučavamo evoluciju globalno povezane populacije oscilatora u slučaju kada je početna raspodjela njihovih stanja von Misesova. Ova situacija nije obuhvaćena OA ansatzom, jer se ne odnosi na ovu familiju početnih raspodjela. Umjesto toga, oslanjamo se na rezultat Watanabe-Strogatz (u obliku MMS principa) za ovaj slučaj. Pozivajući se na MMS princip, zaključujemo da će se stanja globalno povezanih identičnih oscilatora razvijati na trodimenzionoj podmnogostrukosti koja se sastoji od K-J raspodjela. Ovo zapažanje, zajedno s nekim posljedicama i primjenama, predstavlja glavnu motivaciju za rezultate predstavljene u ovoj glavi. U paragrafu 2.2 tvrdimo da je pretpostavka von Misesove raspodjele za početna stanja prilično prirodna u različitim modelima. U paragrafu 2.3 predstavljamo model globalno povezane populacije čija funkcija gustoće  $\rho(z, t)$  evoluirala na invarijantnoj podmnogostrukosti koja se sastoji od K-J raspodjela. U paragrafu 2.4 razmatramo netrivialnu relaciju između parametara modela i parametara rezultirajućih K-J raspodjela. U paragrafu 2.5, rezultati iz [50] se koriste da bi se dobile kvalitativne predikcije mogućih scenarija kolektivne dinamike u našem modelu i povezivanje kvalitativno različitih scenarija s odgovarajućim skupovima vrijednosti parametara modela. Nakon toga slijede neke simulacije koje ilustruju različite scenarije i podržavaju naše predikcije. Pitanja o modalnosti i asimetričnosti rezultirajućih raspodjela također se rješavaju u paragrafu 2.5. Na kraju, u paragrafu 2.6 dajemo eksplicitne izraze za momente K-J raspodjela koristeći formule iz [63].

2.2 Povezani oscilatori i von Misesova raspodjela

Proces sinhronizacije se obično proučava kao tranzicija iz potpuno nekoherentnog stanja (s početnom vrijednošću parametra poretka  $r(0)$ , koji je postavljen na nulu), kroz parcijalno koherentna stanja ( $0 < r(t) < 1$ ), sve do potpune sinhronizacije ( $r(t) \rightarrow 1$ ). Ova postavka podrazumjeva da je početna raspodjela faza oscilatora uniformna na  $[0, 2\pi]$ . Za globalno povezanu populaciju (i neke opštije slučajeve, kao što je pokazano u [53, 75]), OA ansatz pruža moćan metod za tretiranje takvih sistema. Iako ova pretpostavka zvuči sasvim razumno, u nekim procesima određeni stepen koherentnosti u populaciji je prisutan prije nego što se uspostavi veza srednjeg polja. Zbog toga, u takvim slučajevima se neke druge raspodjele pojavljuju kao početne faze oscilatora. U ovom paragrafu ukratko objašnjavamo kako se von Misesove raspodjele pojavljuju kao rezultat kombinovanih efekata veza i šuma. Jedno opšte zapažanje je da von Misesove raspodjele  $v_M(\mu, \kappa)$  imaju maksimalnu entropiju na  $S^1$  za fiksni parametar koncentracije  $\kappa$  (ako je  $\kappa = 0$  tada se dobija uniformna raspodjela). Pored toga, von Misesove raspodjele nastaju kao stacionarne raspodjele procesa drifta i difuzije na kružnici s preferiranom orijentacijom, vidjeti [82].

Posebno se uzima u obzir populacija šumnih oscilatora koja je povezana s vanjskim poljem  $\mu$ :  $\dot{\phi}_j = R \sin(\mu - \phi_j) + \xi_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ ,  $t > 0$ , (2.2) gdje su  $\xi_j$  realizacije Gaussovog bijelog šuma s intenzitetom  $D > 0$ :  $\langle \xi_j(t) \rangle = 0$ ,  $\langle \xi_j(t) \xi_i(t') \rangle = 2D\delta_{ij}(t - t')$ . Stacionarna raspodjela ovog procesa je von Misesova. Ovo se može pokazati rješavanjem Fokker-Planckove jednačine, vidjeti [40, 82]. U [40], usmjerena kretanja plivajućih mikroorganizama s preferiranom orijentacijom  $\mu$  je opisana s (2.2). Drugi primjer je problem procjene fazne veze između šumnih oscilatora, a to je da su razlike u fazama oscilatora  $\Delta_{jk}(t) = \phi_j(t) - \phi_k(t)$  regulisane s (2.2) i  $\mu = 0$ , vidjeti [3]. Napomenimo da model srednjeg polja (1.1) s identično raspoređenim šumnim frekvencijama  $\omega_j = \omega + \xi_j$  također daje stacionarnu von Misesovu raspodjelu (s rotirajućim srednjim uglom  $\mu(t)$ ), o ovome se raspravljalo u 25 radu [15]. U radu [4] su proučavani cirkadijski satovi u populaciji cijanobakterija korištenjem ovog modela za međuceljsku komunikaciju.

2.3 Model Razmotrimo populaciju identičnih oscilatora s globalnom vezom: N

$$\dot{\phi}_j(t) = \omega + \kappa N \sin(\phi_i(t - \tau) - \phi_j(t - \nu)), i = 1, N, t \geq T$$

(2.3)  $\sum_{i=1}^N$  Ovdje je  $\omega$  bešumna frekvencija koja je zajednička za sve oscilatore i  $K$  je jačina globalne veze. Napomenimo da ne zahtijevamo da globalna veza  $K$  bude pozitivna, nego dopuštamo i negativnu (odbojnu) vezu. Razmotrimo proces (2.3) na vremenskom intervalu  $t \in [T, \infty)$  za neko  $T \geq 0$ . Pretpostavimo da su početna stanja oscilatora  $z_1(T) = e^{i\phi_1(T)}, \dots, z_N(T) = e^{i\phi_N(T)}$  izabrana iz von Misesove raspodjele  $vM(\mu, \kappa)$ . Naglasimo da se OA ansatz ne primjenjuje na ovaj skup početnih uslova (osim ako je  $\kappa = 0$ , tada dobivamo uniformnu raspodjelu). Da bismo primijenili MMS princip (ili WS system) nametnuli smo važno ograničenje, a to je da svi oscilatori imaju identične svojstvene frekvencije  $\omega$ . Druga ključna pretpostavka je da je veza globalna, što znači da su fazni pomak  $u$  i kašnjenje  $\tau$  isti u svim poparnim interakcijama. Sistem oblika (2.3) se naziva model Kuramoto-Sakaguchi [85]. Posmatrajući sve zajedno, naš model se može posmatrati kao proces koji se odvija u dvije faze, prva opisana od strane (2.2) do trenutka  $T$  i druga (2.3) nakon  $T$ . Pretpostavlja se da je  $T$  dovoljno veliko, tako da proces u prvoj fazi dostigne stacionarnu raspodjelu. Druga pretpostavka je da šum nestaje u trenutku  $T$ , tj. oscilatori su šumni za  $t \in [0, T]$  i bešumni nakon  $T$ . Iako ova pretpostavka može zvučati vještački na prvi pogled, mi tvrdimo da ova dvofazna dinamika može poslužiti kao adekvatan model u različitim situacijama. Konkretno, može se smatrati da je vanjsko polje deaktivirano u trenutku  $T$ , čime se realizuju poparne interakcije i potisne se šum  $\xi_j$ . Kao jedan konkretan i intrigantan primjer, pozivamo se na eksperiment o progresiji populacije ćelija kroz ćelijski ciklus. U prvoj fazi populacija se dva puta tretira timidin blokovima da bi se sve ćelije uhvatile u (približno) istoj fazi, to je početak S-faze ćelijskog ciklusa. U momentu  $T$  timidin je ispran i posmatrana je kolektivna progresija kroz ćelijski ciklus. Neki detalji o ovom eksperimentu i njegovim rezultatima su izloženi u knjizi [66], strana 25. U ovoj konkretnoj situaciji, može se pretpostaviti da dinamika ćelija opisuje (2.2) u prvoj fazi (prije nego što je timidin ispran), a zatim (2.3) nakon toga. 26 Primjenom MMS principa na (2.3), dobivamo da raspodjela faza u svakom trenutku  $t > T$  pripada K-J familiji. Ovo će biti dodatno istraženo u sljedećem paragrafu.

### 2.4 Dinamika parametara K-J raspodjela

Skup svih Möbiusovih transformacija koji čuvaju jedinični disk  $D$  formira podgrupu. Opšta Möbiusova transformacija koja čuva jedinični disk se može napisati u sljedećem obliku:  $M(z) = e^{i\mu} z + \alpha$ , (2.4)  $1 + \bar{\alpha}z$  za neki ugao  $0 < \mu < 2\pi$  i kompleksan broj  $\alpha \in D, \alpha \neq \pm i$ . Neka slučajna kružna promjenljiva  $z$  ima von Misesovu raspodjelu  $vM(0, \kappa)$ . Tada je slika od  $z$  pod dejstvom Möbiusove transformacije (2.4) kružna slučajna promjenljiva sa sljedećom funkcijom gustoće vjerovatnoće (vidjeti [50]):  $f_{KJ}(\phi) = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\phi - \gamma)}$

$$\exp \kappa(\xi \cos(\phi - \eta) - 2r \cos v) / (1 + r^2 - 2r \cos(\phi - \gamma))$$

8

(2.5)  $\{ \}$  gdje je  $\gamma = \mu + v$ ,  $\xi = r^4 + 2r^2$

$$\frac{\cos(2v) + 1}{r^2} + i \frac{\eta = \mu + \arg\{r^2 \cos(2v) + 1 + ir^2 \sin(2v)\}}{r^2}$$

8

Ova raspodjela zavisi od četiri parametra:

$$\kappa \geq 0, 0 \leq \mu, v < 2\pi, 0 \leq r < 1. \text{ Parametar } \kappa \text{ je naslijeđen od von}$$

1

Misesove raspodjele, dok preostala tri dolaze iz Möbiusove transformacije (2.4). Za fiksnu vrijednost parametra  $\kappa$ , funkcije oblika (2.5) predstavlja ju tro- dimenzionu podmnogostrukost u prostoru raspodjela verovatnoća. Kao što je objašnjeno u paragrafu 2.2, faze  $\phi_1(t), \dots, \phi_N(t)$  u svakom momentu  $t > T_1$  evoluiraju pod dejstvom Möbiusove transformacije koja čuva jedinični disk (2.4) s parametrima  $\mu(t) \in [0, 2\pi]$  i  $\alpha(t) \in \mathbb{C}$ , koja zadovoljava sljedeći sistem običnih diferencijalnih jednačina [63, 100]:  $\alpha' = i(f(t)\alpha^2 +$

$$g(t)\alpha + f^-(t)); \mu' = f(t)\alpha + g(t) + f^-(t)\bar{\alpha}. \quad (2.6) \text{ Ovdje, } f$$

1

je funkcija veze,  $f(t) = i2KN e^{-i(\phi_j(t-\tau)-\nu)}$  i  $g(t) = \omega$ .  $N_j = 1 \sum_{j=1}^N 27 \ 0.5 \ 0.4 \ P_{\varphi,t} \ 0.3 \ 0.2 \ 0.1 \ 0.0 \ 0.3 \ 0.2 \ 0.1 \ 0 \ 1 \ \varphi \ t=T \ 0.20 \ P_{\varphi,t} \ 0.15 \ 0.10 \ 0.05 \ 0.00 \ 0.3 \ 0.2 \ 0.1 \ 0 \ 1 \ \varphi \ t = T + 0.6 \ 2 \ 3 \ 2 \ 3 \ 0.30 \ 0.25 \ P_{\varphi,t} \ 0.20 \ 0.15 \ 0.10 \ 0.05 \ 0.00 \ 0.3 \ 0.20 \ 0.15$

$$P_{\varphi,t} \ 0.10 \ 0.05 \ 0.00 \ 0.3 \ 0.2 \ 0.1 \ 0 \ 1 \ \varphi \ t = T + 0.6 \ 2 \ 3 \ 2 \ 3 \ 0.30 \ 0.25 \ P_{\varphi,t} \ 0.20 \ 0.15 \ 0.10 \ 0.05 \ 0.00 \ 0.3 \ 0.20 \ 0.15$$

5

+ 0.2 0.3 0.2 0.1 0 1 2  $\varphi \ t=T+1$  0.25 0.20  $P_{\varphi,t}$  0.15 0.10 0.05 0.00 3 0.3 0.20 0.15  $P_{\varphi,t}$  0.10 0.05 0.00 0.3 0.2 0.1 0 1 2  $\varphi \ 3 \ t = T + 0.4$  0.2 0.1 0 1 2  $\varphi \ 3 \ t = T + 50$  Slika 2.1: Evolucija funkcija gustoća za vrijednosti parametara

$$R = 0.135, D = 0.1, \mu = 0 \quad (\text{dobija se } \kappa \approx 2) \quad \text{i} \quad K = -4, \nu = 0, \tau = 0.$$

1

Raspodjela evoluiraju prema stacionarnoj bimodalnoj konfiguraciji. Iz teorije Lie grupa, imamo da u svakom momentu  $t > T$  postoji Möbiusova transformacija  $M_t$  koja preslikava faze  $\phi_1(T), \dots, \phi_N(T)$  u  $\phi_1(t), \dots, \phi_N(t)$ . raspodjele su vezana za  $K, \nu, \omega$  i  $\tau$  iz (2.3). Međutim, ovaj odnos je vrlo Parametar  $\kappa$  je proporcionalan količniku  $DR$ . Preostala tri parametra  $K, \nu$  i  $\tau$  suptilan i posredovan kroz (2.6) i dejstva odgovarajućeg protoka Möbiusovih transformacija. U stvari, ova zavisnost je još komplikovanija, jer funkcija veze  $f(t)$  u (2.6) zavisi i od stanja svih oscilatora u momentu  $t$ . Zbog toga parametri  $r, \nu$  i  $\mu$  zavise ne samo o  $K, \nu, \omega$  i  $\tau$ , nego i o  $R$  i  $D$  (kroz  $\kappa$ ). Zato je veoma teško procijeniti evoluciju parametara  $K, \nu$  raspodjele ako su dati parametri modela. Ta evolucija se može djelimično shvatiti samo fizičkom intuicijom, simulacijama i izrazima za momente i uporedivanjem s analizom iz [50]. Ovo će se proučavati u narednim paragrafima ove glave. 2.5 Evolucija oblika na invarijantnoj podmnogostrukosti  $K, \nu$  raspodjela  $U$  svom radu, Kato i Jones su pokazali da raspodjele (2.5) imaju različite oblike u zavisnosti o parametrima. U ovom paragrafu proučavamo evoluciju oblika funkcije gustoće faza u modelu (2.3) za različite vrijednosti parametara 28 0.5 0.4  $P_{\varphi,t}$  0.3 0.2 0.1 0.0 0.3 0.2 0.1 0 1  $\varphi \ t=T$  0.20  $P_{\varphi,t}$  0.15 0.10 0.05 0.00 0.3 0.2 0.1 0 1  $\varphi \ t = T + 58$  2 3 2 3 0.20 0.15  $P_{\varphi,t}$  0.10 0.05 0.00 0.3 0.2 0.1 0 1 2  $\varphi \ t=T+1$  0.4 0.3  $P_{\varphi,t}$  0.2 0.1 0.0 0.3 0.2 0.1 0 1 2  $\varphi \ t = T + 60$  0.25 0.20  $P_{\varphi,t}$  0.15 0.10 0.05 0.00 3 0.3 0.20 0.15  $P_{\varphi,t}$  0.10 0.05 0.00 3 0.3 0.2 0.1 0 1  $\varphi \ t=T+3$  0.2 0.1 0 1  $\varphi \ t = T + 61$  2 2 3 3 Slika 2.2: Evolucija funkcija gustoća za vrijednosti parametara

$$R = 0.135, D = 0.1, \mu = 0 \quad (\text{dobija se } \kappa \approx 2) \quad \text{i} \quad K = -3, \nu = 0, \tau = 1.$$

1

U slučaju veze s kašnjenjem, modalnost se mijenja naizmjenično (unimodalna u bimodalnu i obrnuto). Tara. Ova studija je podržana rezultatima simulacija za neke ilustrativne slučajeve. Na slikama 2.1-2.3 je prikazana evolucija funkcije gustoće faza oscilatora  $\rho(\phi, t)$  za tri različita slučaja u različitim momentima  $t$ . Svaka funkcija gustoće je dobijena rješavanjem sistema (2.2)-(2.3) za populaciju koja se sastoji od  $N = 500$  oscilatora. U svim simulacijama, moment tranzicije iz prve faze u drugu je  $T = 30$ . Mi ćemo simulirati efekte privlačne i odbojne veze, veze s globalnim kašnjenjem  $\tau$  i veze s faznim pomakom. Napomenimo da MMS princip vrijedi za sve tipove veza pomenutih gore, stoga sve funkcije gustoće prikazane na slikama pripadaju familiji K-J raspodjela. Familija (2.5) sadrži i simetrične i asimetrične, kao i unimodalne i bimodalne raspodjele. S druge strane, von Misesove raspodjele su unimodalne i simetrične. U našem kontekstu to znači da se unimodalna i simetrična početna raspodjela faza može razviti u bimodalnu i/ili asimetričnu s vezom srednjeg polja. Interesantno je objasniti kako različiti efekti (kao što su negativna veza, veze s kašnjenjem, veze s faznim pomakom) utiču na oblik raspodjela. Razlikujemo nekoliko kvalitativno različitih scenarija: 1. Prvo razmotrimo model bez kašnjenja i faznog pomaka:  $\tau = 0, u = 0$ . a) Ako veze nema u prvoj fazi ( $R = 0$ ) i veza je odbojna u drugoj ( $K \leq 0$ ), tada je funkcija gustoće  $\rho(\phi, T)$  konstantna i ostaje 29 0.7 0.6 0.5  $P(\phi, t)$  0.4 0.3 0.2 0.1 0.0  $\phi = T + 1$  2  $\phi = T + 2$  3 0.8 0.6  $P(\phi, t)$  0.4 0.2 0.0  $\phi = T + 3$  1

**2 1.0  $P(\phi, t)$  0.8 0.6 0.4** 14

0.2 0.0  $\phi = T + 5$  1.2 1.0 0.8

**$P(\phi, t)$  0.6 0.4 0.2 0.0** 5

3  $\phi = T + 9$  0.8

**$P(\phi, t)$  0.6 0.4 0.2 3  $\phi = T + 9$  0.8** 5

$\phi = T + 6$  3 3 Slika 2.3: Evolucija funkcija gustoća za vrijednosti parametara

**$R = 0.185, D = 0.1, \mu = 0$  (dobija se  $\kappa \approx 3$ ) i  $K = 2, u = \pi/2, \tau = 0$ .** 1

Fazni pomak povećava asimetričnost raspodjele. konstantna za svako  $t > T$ , što znači da stanja oscilatora imaju kružnu uniformnu raspodjelu ( $\kappa = 0, r = 0$ ). b) Ako je  $R = 0$  i  $K > 0$ , tada je funkcija gustoće  $\rho(\phi, T)$  konstantna i evoluira dalje prema postepenoj sinhronizaciji ( $r \rightarrow 1$ ) na dvo-dimenzionoj invarijantnoj podmnogostrukost koja se sastoji od umotanih Cauchyjevih funkcija gustoća ( $\kappa = 0$ ). c) Ako je veza privlačna u obe faze ( $K, R > 0$ ), tada nema promjene u modalnosti. Dobivamo unimodalne K-J funkcije gustoće za svako  $t > T$  i postepenu sinhronizaciju ( $\kappa > 0, r \rightarrow 1$ ). d) Ako je

privlačna veza u prvoj fazi  $R > 0$ , koja je praćena odbojnom u drugoj fazi  $K < 0$ , sistem evoluirá prema stacionarnoj bimodalnoj konfiguraciji s dvije koncentracione taćke odvojene uglom  $\pi$ . Ovaj scenarij je prikazan na slici 2.1. Ovdje je  $\kappa > 0$ ,  $0 < r \rightarrow a < 1$ . 2. Prisustvo globalne veze s kašnjenjem ( $\tau = 1$ ) s  $R > 0$  i  $K < 0$ , donosi oscilatornu dinamiku. Raspodjela mijenja modalnost (od unimodalne do bimodalne i obrnuto) nekoliko (ili beskonaćno mnogo) puta, vidjeti sliku 2.2. Ovdje je  $\kappa > 0$ , jer  $r$  oscilira. Pitanje dugotrajnog ponašanja za ovaj slućaj je prilićno suptilan (zapravo, zavisi od intenziteta odbojne veze  $K$ ). 3.0 3. Prisustvo faznog pomaka  $u \approx \pi/2$  donosi jake asimetrićne raspodjele, slika 2.3. Stoga, fazni pomak je parametar koji bitno utiće na asimetrićnost raspodjela. U stvari, K-J raspodjele su simetrićne samo za nekoliko posebnih slućajeva:  $\kappa = 0$  (umotana Cauchyjeva),  $r = 0$  (von Misesova) i  $v = 0$  ili  $v = \pi$ . Sada se ukratko bavimo pitanjem bimodalnih stacionarnih konfiguracija pomenutih u taćki 1d) gore. Engelbrecht i Mirollo su u radu [30] koristili MMS princip da bi dokazali da su jedini mogući granićni parametri za (2.3) pojedinaćne taćke. Zbog toga, uprkos pojavljivanju bimodalnih raspodjela, sistem nikada ne moće da se sinhronizuje u dvije razlićite taćke. U stvari, K-J familija ne sadrži raspodjele s visokom koncentracijom u dvije taćke, funkcije gustoće su samo umjereno bimodalne, kao što su one prikazane na slikama. To znaći da stacionarna konfiguracija fazne raspodjele ne zavisi mnogo o tome koliko je šiljata von Misesova raspodjela. Drugim rijećima, stacionarne bimodalne konfiguracije dobijene za slućaj 1d) se razlikuju samo kad je  $\kappa = 0.5$  i za vrlo veliko  $\kappa$ . 2.6 Momenti Marvel i ostali su u radu [63] takoder izveli formulu za momente fazne raspodjele povezanih oscilatora. Jednostavnim ubacivanjem Fourierovih koeficijenata von Misesove raspodjele  $v_M(0, \kappa)$  u formule (55)-(56), iz kojih dobivamo izraz za dinamićku evoluciju  $m$ -tog momenta:  $\langle z^m \rangle(t) = a_m(t) +$

$$m-1 (1 - |\alpha(t)|^2)^{k+1} k! \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+k)! I_{|n+k+1|}(\kappa)$$

1

$e^{i(m+n)\psi(t)} \bar{a}_n(t)$ ,  $\sum_{k=0}^{\infty} (2.7) n! I_0(\kappa)$  gdje je  $I_l$  modificirana Besselova funkcija prve vrste reda  $l$ . Kao i prije,  $a(t)$  i  $\psi(t)$  su rješenja sistema (2.6). Njihovo geometrijsko znaćenje je takoder predstavljeno u [63]:  $\psi(t)$  je ukupna rotacija u suprotnom smjeru kazaljke na satu početne raspodjele do vremena  $t$ , i  $a(t)$  je slika centra (nule) pod dejstvom protoka Möbiusove transformacije. Konkretno, formula za centroid raspodjele daje:

$$\langle z \rangle(t) = a(t) + (|\alpha(t)|^2 - 1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n I_n(\kappa)$$

1

$e^{in\psi(t)} \bar{a}_{n-1}(t)$ .  $\infty (2.8) \sum_{n=1}^{\infty} I_0(\kappa)$  Interesantno je uporediti gornju formulu s izrazom za momente dobivene u radu [50]. 31 Glava 3 Primjene moćela Kuramoto na krućnici na detekciju zajednica i karakterizaciju kompleksnih mreća 3.1 Uvod U ovoj glavi razmatramo model faznih oscilatora koji su povezani preko kompleksne mreće interakcija kao paradigma kolektivnog ponašanja u velikim sistemima. Identifikacijom oscilatora s ćvorovima i interakcijama s granama, moguće je definisati model Kuramoto na kompleksnoj mreći  $N$ . Taj model se moće napisati kao sljedeći dinamićki sistem:  $\dot{\phi}_j = \omega_j + N \sum_{i=1}^N K_{ij} \sin(\phi_i - \phi_j)$ ,  $j = 1, \dots, N$ . (3.1)  $1 N \sum_{i=1}^N$  Ovdje,  $\phi_i \in [0, 2\pi)$  je faza (stanje) oscilatora  $i$ ,  $\omega_j$  je svojstvena frekvencija svih oscilatora.  $K_{ij}$  je matrica poparnih interakcija (jaćina veza) izmeću oscilatora  $i$  i  $j$  u mreći  $N$ . Matrica  $K_{ij}$  moće biti asimetrićna. Naglasimo da se model (3.1) razlikuje od onog koji je razmatran u pi-onirskom radu Kuramoto [52]. U [52] je pretpostavljena globalna veza, tj.  $K_{ij} \equiv K > 0$  za  $\forall i, j$ . S druge strane, svojstvene frekvencije  $\omega_j$  su razlićite za razlićite oscilatore. Poznato je da ako je mreća povezana (tj. postoji grana u mreći izmeću dva proizvoljna ćvora  $i$  i  $j$ ) i sve interakcije su privlaćne (tj.  $K_{ij} \geq 0$  za  $\forall i, j$ ) tada će se u određenom trenutku pojaviti sinhronizacija svih oscilatora u mreći.



32 Model povezanih oscilatora (3.1) se može primjeniti u istraživanju ko- mpleksnih mreža. Ova ideja je ispitana od 2005. do 2007. u sljedećim radovima [6, 7, 71]. Pomoću tih metoda, koje su bazirane na posmatranju postepenog procesa sinhronizacije u kompleksnoj mreži Kuramoto oscilatora, dolazi se do važnih informacija o topologiji mreže, a posebno pomažu u de- tekciji međusobno povezanih klastera. Ista ideja se nastavlja dalje koristiti u nekoliko radova gdje se proučavaju svojstva mreže posmatrajući proces sinhronizacije u njoj [13, 54, 59]. Metode ispitivanja kompleksnih mreža proučavanjem odgovarajućeg modela poveza- nih oscilatora imale su određene utjecaje i primjene u posljednjem desetljeću, zajedno s tradicionalnim metodama koje se često temelje na klasičnim rezu- ltatima matematičke teorije grafova ili slučajnih šetnji na mrežama [12, 32]. U ovoj glavi istražujemo kompleksne mreže detekcijom kolektivnog po- našanja određenih grupa oscilatora. Informacije o kolektivnom ponašanju izvlačimo iz statistike Möbiusovih transformacija koju reguliše dinamika osci- latora u fiksnim vremenskim intervalima. U sljedećem paragrafu predložimo konceptualni okvir za karakterizaciju kompleksnih mreža. U paragrafu 3.3 predložimo da grupa Möbiusovih tra- nsformacija može poslužiti kao adekvatan matematički objekat za opisivanje srednjih polja u mrežama povezanih oscilatora. Ovaj model se može primje- niti u detekciji zajednica u mrežama, što je pokazano u paragrafu 3.4.

3.2 Karakterizacija kompleksnih mreža pomo- ću statistike Möbiusovih transformacija U ovom paragrafu mi karakterišemo kompleksnu mrežu otkrivajući ko- lektivno ponašanje oscilatora u njoj. Međutim, kolektivno ponašanje ni- smo uočavali kroz fenomen sinhronizacije, nego kroz prisutnost i različitost Möbiusovih transformacija u dinamici povezanih oscilatora na zadanom vre- menskom intervalu. Dakle, istražujemo neka topološka i strukturna svojstva kompleksnih mreža ispitivanjem u kojoj se mjeri algebarska struktura opi- sana u [63] nalazi u mreži. Grubo rečeno, što je mreža kompleksnija, manje će se ove strukture naći u njoj. U sljedećem potparagrafu ćemo navesti nekoliko osnovnih činjenica iz kompleksne analize, uvesti neke nove koncepte i objasniti glavnu ideju pro- učavajući idealistične modele. Konačno, u potparagrafu 3.2.2 ćemo ponovo razmatrati i nadograditi te koncepte kako bismo ih učinili primjenjivim za slučajnu i realnu mrežu.

33 3.2.1 Koncepti: koherentnost mreže, korenspondenci- ja čvora Razmotrimo model Kuramoto identičnih faznih oscilatora povezanih kroz mrežu interakcija  $N$  (3.1) u vremenskom intervalu  $[0, T]$ . Pretpostavimo da je broj oscilatora  $N$  dovoljno velik (recimo,  $N > 100$ ) i da su početne faze oscilatora slučajne, izabrane iz neke određene vjerovatnosne raspodjele na  $[0, 2\pi]$ :  $\varphi_i(0) = \varphi_{0i}$ ,  $i = 1, N$ . (3.2) Na primjer, u svim primjerima u ovom paragrafu pretpostavit ćemo da početne faze oscilatora imaju uniformnu raspodjelu na  $[0, 2\pi]$ . Dakle, moglo bi se pretpostaviti da  $\varphi_{0i} \sim U[0, 2\pi]$ . U nastavku će biti prikladno predstavljati faze svih oscilatora kao tačke na jediničnoj kružnici  $S^1$  u kompleksnoj ravni:  $z_i(t) = e^{i\varphi_i(t)}$ . Shodno tome, početna raspodjela tačaka  $z_i(0)$ ,  $i = 1, N$  je uniformna na  $S^1$ . U slučaju globalne veze ( $K_{ij} = K$ ,  $\forall i, j = 1, N$ ), tačke  $z_i$  se kreću pod dejstvom grupe Möbiusovih transformacija koje čuvaju jedinični disk [63]. U svakom zadanom momentu  $t$ , tačke su zadane dejstvom odgovarajuće Möbiusove transformacije. Tada, iz teorije Lie grupa, slijedi da su tačke  $z_1(T), \dots, z_N(T)$  dobivene od  $z_1(0), \dots, z_N(0)$  primjenom neke Möbiusove transformacije (to je vrlo teško odrediti apriori). Poznato je da za dvije tačke  $z_i, w_i$ , postoji beskonačno mnogo Möbiusovih transformacija koje preslikavaju tačku  $z_i$  u  $w_i$ . Isto vrijedi ako imamo dvije različite tačke  $z_i, z_j$  i njihove dvije slike  $w_i, w_j$ . Ipak, Möbiusova transforma- cija je jedinstveno određena njenim dejstvom na tri različite tačke: Propozicija 3.1. Neka su  $z_i, z_j, z_k$  tri različite tačke na  $S^1$  i  $w_i, w_j, w_k$  druge tri različite tačke na  $S^1$ . Tada postoji jedinstvena Möbiusova transformacija koja preslikava  $z_i$  u  $w_i$ ,  $z_j$  u  $w_j$  i  $z_k$  u  $w_k$ . Prethodna propozicija je osnovna činjenica iz kompleksne analize [84]. Bazirano na tome, uvodimo odgovarajuću terminologiju koju ćemo koristiti u nastavku. Neka su  $z_1(0), \dots, z_N(0)$  početna stanja oscilatora i  $z_1(T), \dots, z_N(T)$  njihova stanja u momentu  $t = T$  (dobiveni iz sistema (3.1)). Definicija 3.1. 1. Kažemo da se četiri oscilatora  $i, j, k, l$  slažu, ako za svako  $T > 0$ , postoji Möbiusova transformacija  $MT$  koja preslikava tačke  $z_i(0), z_j(0), z_k(0), z_l(0)$  u tačke  $z_i(T), z_j(T), z_k(T), z_l(T)$  respektivno. 2. Kažemo da  $p > 4$  oscilatora  $i_1, \dots, i_p$  leže u

istom polju, ako za svako  $T > 0$ , postoji Möbiusova transformacija  $MT$  koja preslikava tačke  $z_1(0), \dots, z_p(0)$  u tačke  $z_1(T), \dots, z_p(T)$ . 34 Napomena 3.1. Napomenimo da koncepti u gore navedenoj definiciji zavise o topologiji mreže i početnim stanjima svih oscilatora. Drugim riječima, četiri oscilatora u mreži se mogu slagati za određene početne uvjete (3.2), a da se ne slažu u istoj mreži za neke druge početne uvjete. Međutim, kao što simulacije potvrđuju, ako se četiri oscilatora slažu (ne slažu) u određenom vremenskom intervalu  $(0, t_1)$ , tada se oni slažu (ne slažu) u bilo kojem vremenskom intervalu  $(t_1, t_2)$ . Također, treba naglasiti da dva skupa oscilatora koja leže u dva zajednička polja se mogu presijecati, pošto jedan oscilator može da leži u više zajedničkih polja. Napomena 3.2. Zajedničko polje se može formirati vanjskim silama (utječući na frekvencije  $\omega$ ) i samih oscilatora (mreže) (kroz njihove međusobne interakcije  $K_{ij}$ ). Definicija 3.2. Koherentnost mreže  $N$  povezanih oscilatora je vjerovatnoća da se slučajno izabrana četiri oscilatora iz  $N$  slažu. Koherentnost mreže  $N$  označavamo s  $r_N$ ,  $0 \leq r_N \leq 1$ . Za grupu oscilatora  $H \subseteq \{1, 2, \dots, N\}$ , definiramo koherentnost grupe  $H$  u mreži  $N$  na isti način. Napomena 3.3. Na osnovu statističke mjere, koherentnost ne zavisi o početnim stanjima pojedinačnih oscilatora (za zadanu dovoljno veliku mrežu). Drugim riječima, jedna određena četvorka oscilatora se može slagati za neke početne uslove i da se ne slaže za druge, ali vjerovatnoća da se četiri slučajno izabrana oscilatora slažu je približno ista za fiksnu topologiju mreže i određenu raspodjelu početnih faza. Sada, fiksirajmo oscilator  $i$  i slučajno izaberimo tri oscilatora  $j_1, j_2, j_3$  različitih od  $i$ . Definicija 3.3. Stepenn koherencije oscilatora  $i$  u mreži  $N$  je vjerovatnoća da se četvorka  $i, j_1, j_2, j_3$  slažu, podijeljena s koherentnošću mreže  $r$ . Stepenn koherencije oscilatora  $i$  označavamo s  $m_i$ . Očito je da se može razmatrati stepenn koherencije oscilatora u bilo kojoj grupi  $H$  oscilatora u mreži  $N$ . Također, očito je da u svakoj mreži prosječni stepenn koherencije jednak jedan. Pojam koherencije se može koristiti da se odrede važni (utjecajni) oscilatori u mreži. Pod utjecajnim oscilatorima (grubo rečeno) podrazumjevamo one koji znatno utječu na postojanje zajedničkih polja. Doista, oscilatori koji imaju izuzetno nizak ili visok stepenn koherencije su sumnjivi da budu važni (ili marginalni) oscilatori. 35 Kao što smo vidjeli, važno je da za naša razmatranja provjeravamo da li se četiri oscilatora slažu. Najučinkovitiji način da se to provjeri je korištenje osnovnog geometrijskog koncepta: dvorazmjera (engl. cross ratio). Dvorazmjera [91] četiri tačke  $z_1, z_2, z_3, z_4$  u kompleksnoj ravni je zadana s: CR

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_4 - z_1}{z_3 - z_1} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}$$

16

Propozicija 3.2. Neka su  $z_1, z_2, z_3, z_4$  četiri različite tačke u kompleksnoj ravni i  $w_1, w_2, w_3, w_4$  druge četiri različite tačke. Tada, Möbiusova transformacija koja preslikava  $z_i$  u  $w_i$ ,  $i = 1, 4$  postoji ako i samo ako je  $CR(z_1, z_2, z_3, z_4) = CR(w_1, w_2, w_3, w_4)$ . Napomena 3.4. Dvorazmjera četiri tačke  $z_1, z_2, z_3, z_4$  je realan broj ako i samo ako su  $z_1, z_2, z_3, z_4$  konciklične (ili kolinearne). U našem slučaju sve tačke leže na jediničnoj kružnici, prema tome svaka dvorazmjera će biti realan broj. Sada, posmatrajmo nekoliko jednostavnih modela. Model 1. Posmatrajmo model globalno povezane populacije iz [63]. Svaki par je povezan s istom jačinom veze  $K_{ij} = K$ . U [63] je teorijski pokazano da u svakom vremenskom intervalu  $(t_1, t_2)$  svi oscilatori su zadani istom Möbiusovom transformacijom. Koristeći gore navedenu terminologiju, kažemo da svi leže u istom polju. Zbog toga, koherentnost ove mreže je maksimalna,  $r = 1$  i stepenn koherencije svakog oscilatora je jednak jedan. Naravno, simulacije ovo potvrđuju. Kažemo da je ovo perfektno koherentna mreža. Napomena 3.5. Kao djelomičan slučaj gore navedenom modelu, prazna mreža identičnih oscilatora (tj. nema interakcije/veze,  $K_{ij} \equiv K = 0$ ) je također perfektno koherentna. Doista, u ovom modelu oscilatori izvode jednostavne rotacije na  $S^1$  s jednakim frekvencijama  $\omega$ . Takva rotacija je trivijalan slučaj Möbiusovih transformacija.

Model 2. Posmatrajmo mrežu koja se sastoji od dvije zajednice, gdje je svaki par oscilatora povezan jačinom  $K_{ij} = K$  ako  $z_i$  i  $z_j$  pripadaju istoj zajednici, dok za dva oscilatora koji pripadaju različitim zajednicama jačina je  $K_{ij} = v < K$ . Drugim riječima rečeno, svaki par oscilatora je povezan, ali jačina veze  $K$  unutar zajednice je veća od jačine veze  $v$  između zajednica. Ovaj model je proučavan u [1, 77] kao jednostavan primjer populacije povezanih oscilatora koji može dovesti do zagonetnog fenomena nazvanog chimera stanje. U radu [63] ovaj model se ne spominje, ali se teoretski lako pokazuje da se taj rezultat može primijeniti i na ovaj model [80]. Stoga, obje zajednice se razvijaju pod dejstvom grupe Möbiusovih transformacija (u svakom momentu dvije različite Möbiusove transformacije za dvije zajednice). Drugim riječima, ovdje postoje dva polja, prvo je zajedničko za jednu zajednicu, drugo za drugu. Koherentnost mreže zavisi o omjeru veličina dviju zajednica. Koherentnost je minimalna ako su zajednice iste veličine, onda je jednako  $r = (1/2)^3 = 1/8$ , i stepen korenspondencije svakog oscilatora je  $m_i = 1$ . Ako je jedna zajednica duplo veća od druge, tada će se koherentnost povećati:  $r = (1/3)^4 + (2/3)^4 = 18/81 = 2/9$ . Neka oscilator  $i$  pripada manjoj  $i$  i  $j$  većoj zajednici. Tada je stepen korenspondencije oscilatora  $i$  i  $j$ , respektivno:  $m_i = 3 = 2177 = (1/3)^3 r$ ,  $m_j = (2/3)^3 = 2177 = 24/81 = 8/27$ . U cjelini, ovo nije perfektno koherentna mreža ( $r < 1$ ), ali ona sadrži dvije perfektne koherentne grupe.

Model 3. Sada posmatrajmo slučajni Erdős-Renyi (ER) graf [12] gdje je svaki par oscilatora  $i, j$  povezan s vjerovatnoćom  $p = 0.9$ . Moglo bi se očekivati da će se dinamika (raspodjela faza) razvijati u blizini idealne mreže (model 1), pošto nedostaje samo 10% interakcija (grana u grafu) (slika 3.1). Međutim, ne možemo se nadati nekom teorijskom rezultatu postojanja Möbiusovih transformacija u njemu, nego se potpuno oslanjamo na simulacije. Simulacije pokazuju da se slučajna četvorka skoro nikad perfektno ne slaže, tj. dvorazmjera se skoro nikad perfektno ne čuva. Stoga, mi ispitujemo koliko često se dvorazmjera približno čuva. Razmatramo sistem (3.1) u vremenskom intervalu  $t \in [0, 1]$  i proučavamo relativnu razliku dvorazmjera zadanu s:  $C R(1) - C R(0) / X = C R(0)$ , gdje su  $C R(0)$  i  $C R(1)$  dvorazmjere četiri tačke uzetih u momentima  $t = 0$  i  $t = 1$  respektivno. Uzimamo aproksimaciju  $\epsilon = 0.01$ , tj. kažemo da se četiri oscilatora (približno) slažu, ako vrijedi  $|X| < 0.01$ . U ovom slučaju simulacija pokazuje da je koherentnost mreže približno 0.2 (za jačinu veze  $K = 4$ ).

### 3.2.2 Slučajne mreže

Posljednji primjer pokazuje da moramo malo modificirati sve definicije kako bismo dobili značajne koncepte za slučajne (i realne) mreže.

37 Slika 3.1: Raspodjela faza za tri 0.20 grafa u momentu  $T = 3$  određena sistemom (3.1) s uniformno raspo- 0.15 ljenim početnim fazama. Na osnovu 0.10 OA ansatza i MMS principa sli- jedi da je raspo- 0.05 vezane populacije (crna linija) Poi- ssonovo jezgro s određenim parame- 0.00 trima. Kao što se i očekivalo, ra- 0 1 2 3 4 5 6 spodjela faza za Erdős-Renyi graf s  $p = 0.9$  (crvena linija) je bliža Poi- ssonovom jezgru nego s  $p = 0.5$  (plava linija). Posmatrajmo mrežu povezanih oscilatora  $N$ . Slučajno izaberimo četiri oscilatora  $i, j, k, l$  i  $N$  i posmatrajmo njihova početna stanja (izabranih iz  $U[0, 2\pi]$ )  $z_i(0), z_j(0), z_k(0), z_l(0)$  i njihova stanja u momentu  $t = T$  određenim sistemom (3.1):  $z_i(T), z_j(T), z_k(T), z_l(T)$ . Označimo odgovarajuće dvora- zmjere u momentima  $t = 0$  i  $t = T$  s  $C R(0)$  i  $C R(T)$  respektivno. Razma- tramo relativnu razliku dvorazmjera:  $X_N = C R(T) - C R(0) / C R(0)$ . Pošto su oscilatori  $i, j, k, l$  slučajno izabrani, može se  $X_N$  tretirati kao slučajna promjenljiva. Na ovaj način, sa svakom mrežom  $N$  povezujemo slučajnu pro- mjenljivu  $X_N$ . 1. Za model 1,  $X_N$  je potpuno koncentrisana u nuli, njena funkcija gustoće je delta funkcija  $\delta_0(x)$ . 2. Za model 2,  $X_N$  ima nenultu vjerovatnoću nulte tačke (za slučaj jedna- ko velikih zajednica vjerovatnoća nule je jednaka 1/8). Dakle, u ovom slučaju raspo- djela slučajne promjenljive  $X_N$  je također singularna (nije apsolutno neprekidna). Zaključak. Ako slučajna promjenljiva  $X_N$  ima pozitivnu vjerovatnoću nulte tačke, tada mreža  $N$  sadrži perfektno koherentnu grupu. S druge strane, slučajne promjenljive povezane sa slučajnim mrežama pretvaraju se u apso- lutno neprekidne. Uvedimo sada modifikovane definicije koherentnosti i stepena korenspo- dencije koje će biti značajne i za slučajne mreže. Fiksirajmo malo  $\epsilon > 0$  i  $T > 0$ .

38 Definicija 3.4. Za dato  $\epsilon > 0$ , koherentost mreže  $N$  je  $r_N = P \{-\epsilon < X_N < \epsilon\}$ . Kao i ranije, na isti način uvodimo pojam koherentnosti grupe oscilatora. Napomena 3.6. Napomenimo da

u gore navedenoj definiciji, koherentnost zavisi o  $\epsilon$  i o vremenu  $T$ . U simulacijama, koherentnost opada s  $T$ , pošto se devijacije dvorazmjera (ili greške računanja) akumuliraju u dužim intervalima. Zbog toga, kada se uporeduju dvije mreže, važno je da se uzima isto  $\epsilon$  i  $T$  za oboje. Štaviše, koherentnost također zavisi i o početnoj raspodjeli faza. Ovo je razlog zbog kojeg smo u potparagrafu 3.2.1 odredili da početna raspodjela faza bude uniformna na  $[0, 2\pi]$ . Također se može uvesti još jedna moguća definicija koherentnosti koja ne zavisi o  $\epsilon$ : Definicija 3.5. S-koherentnost mreže  $N$  je entropija odgovarajuće slučajne promjenljive  $X_N$ . Sada, posmatrajmo jedan oscilator  $i$ . Slučajno izaberimo tri oscilatora koja su različita od  $i$ , označimo ih s  $j, k, l$ . Označimo njihova stanja u svakom momentu  $t$  s tačkama  $w_i(t), w_j(t), w_k(t), w_l(t)$  na kružnici  $S^1$ . Dvorazmjera te četiri tačke u svakom momentu  $t$  je realan broj, označimo ih s  $CR_w(t)$ . Postavimo da je  $p_i = P\{-\epsilon < CR_w(t) - w_C(0)w(0) < \epsilon\}$ . Drugim riječima,  $p_i$  je vjerovatnoća da se  $w_i$  i tri slučajna oscilatora slažu za malo  $\epsilon > 0$ . Definicija 3.6. Stepenspodencije oscilatora  $i$  u mreži  $N$  je  $m_i = r_N p_i$ . Ovdje  $r_N$  označava koherentnost mreže  $N$ . Napomenimo da stepenspodencije oscilatora zavisi o njegovoj interakciji (tj. o topologiji mreže) i o početnim stanjima (fazama) čitavog sistema. Za slučajno birajući oscilator  $i$  iz mreže, njegov stepenspodencije  $m_i$  se posmatra kao slučajna promjenljiva. Na ovaj način uvodimo još jednu slučajnu promjenljivu koja je povezana s mrežom  $N$ . Označimo je s  $Y_N$ . Napomena 3.7. Kratko objašnjavamo dvije slučajne promjenljive  $X_N$  i  $Y_N$  koje karakterišu mrežu  $N$ . Slučajna promjenljiva  $X_N$  daje informaciju o koherentnosti mreže. Koncentracija raspodjele promjenljive  $X_N$  oko nule ukazuje na prisustvo koherentnih grupa u mreži. S druge strane,  $Y_N$  karakteriše raspodjelu uloga (uticaja) oscilatora u mreži. Za određene mrežne interakcije  $K_{ij}$  i fiksne početne uvjete (3.2), ove slučajne promjenljive mogu uzeti konačan skup mogućih vrijednosti ( $N_4$  i  $N$  vrijednosti respektivno). Međutim, kako pretpostavljamo da je početna faza svakog oscilatora slučajna (uniformno raspodjeljena na  $[0, 2\pi]$ ), dobivamo da obje slučajne promjenljive uzimaju beskonačan skup mogućih vrijednosti. Domena  $X_N$  je realna linija, dok  $Y_N$  uzima pozitivne realne brojeve. 39 (a) (b) (d) (e) (c) (f) (g) (h) (i) Slika 3.2: Empirijska funkcija gustoće vjerovatnosti slučajnih promjenljivih  $X_N$  (prva kolona),  $-\log|X_N|$  (druga kolona) i  $Y_N$  (treća kolona) za tri različita modela: (a), (b), (c): Globalno povezana populacija (model 1); (d), (e), (f): Dvije perfektne zajednice jednakih veličina (model 2); (g), (h), (i): Dvije perfektne zajednice različitih (2 : 1) veličina. Uzorci slučajnih promjenljivih  $X_N$  i  $Y_N$  se mogu generirati numerički pomoću Monte Carlo metode. U narednim primjerima prikazujemo empirijsku funkciju gustoće vjerovatnosti dvije slučajne promjenljive i kratko komentiramo slike. Napomena 3.8. Budući da je  $X_N$  visoko centrirana oko nule za neke mreže, prikladno ju je zamjeniti s  $-\log_{10}|X_N|$ , te nju razmatrati. Crtaćemo funkciju gustoće slučajnih promjenljivih  $X_N$  i  $-\log_{10}|X_N|$  za neke primjere proučavane u nastavku. U sljedećim primjerima uzet ćemo da je  $\epsilon = 0.01$  i  $T = 1$  i slučajno birati početne faze iz uniformne raspodjele na  $[0, 2\pi]$ . Napomenimo da je potrebno izabrati  $T$  na takav način da se sinhronizacija ne dešava u intervalu  $(0, T)$  i usporediti dvorazmjere prije sinhronizacije. 40 (a) (d) (b) (e) (c) (f) (g) (h) (i) Slika 3.3: Empirijska funkcija gustoće vjerovatnosti slučajnih promjenljivih  $X_N$  (prva kolona),  $-\log|X_N|$  (druga kolona) i  $Y_N$  (treća kolona) za tri različita ER grafa s  $N = 500$  čvorova: (a), (b), (c): ER graf s  $p = 0.9$ ; (d), (e), (f): ER graf s  $p = 0.5$ ; (g), (h), (i): ER graf s  $p = 0.1$ . 1. Za model 1 funkcije gustoće su prikazane na slikama 3.2(a), 3.2(b), 3.2(c). Može se vidjeti da za ovu mrežu funkcija gustoće promjenljive  $X_N$  je u biti delta funkcija centrirana u nuli, a od  $Y_N$  je delta funkcija centrirana u 1. 2. Za model 2 su prikazana dva slučaja. Slike

pri- kazuju funkcije gustoće za slučaj kada su zajednice jednakih veličina. U tom slučaju funkcija gustoće vjerovatnoće slučajne promjenljive  $X_N$  ima težinu (mjeru) koja je jednaka 18 u nuli. Funkcija gustoće promjenljive  $Y_N$  je ista kao u modelu 1. Slike 3.2(g), 3.2(h) i 3.2(i) prikazuju funkcije gustoće vjerovatnoće za mrežu u kojoj je jedna zajednica duplo manja od druge. Lako se uočava da u ovom slučaju raspodjela od  $Y_N$  koncentrisana u dvije tačke:  $x_0 = 137$  ima vjerovatnoću 13, a  $x_1 = 214741$  (a) (b) (c) Slika 3.4: Empirijska funkcija gustoće vjerovatnosti slučajnih promjenljivih  $X_N$ ,  $-\log|X_N|$  i  $Y_N$  za Watts-Strogatz mrežu s  $N = 500$  čvorova i parametrima  $k = 50$  i  $p = 0.1$ . ima vjerovatnoću 23 . 3. Funkcije gustoće za ER mreže s  $p = 0.9$ ,  $0.5$  i  $p = 0.1$  su prikazane na slici 3.3. Koherentnost ovih mreža su približno 0.2, 0.12 i 0.2. Kao što se i očekivalo, mreža s  $p = 0.5$  ima manju koherentnost od ostalih dvije. Također se uočava da je slučajna promjenljiva  $Y_N$  apsolutno neprekidna i koncentrisana na intervalu  $(0, 2)$  s centrom u  $x = 1$ . 4. Razmotrimo poznatu Watts-Strogatz (WS) mrežu [12, 102] s  $N = 500$ ,  $k = 50$  (početni broj veza) i za različito  $p$  ( $p$  je vjerovatnoća uključivanja). Empirijske funkcije gustoće vjerovatnosti za parametre  $k = 50$  i  $p = 0.1$  su prikazane na slici 3.4. Simulacije pokazuju da koherentnost WS mreže ne zavisi o vjerovatnoći uključivanja  $p$  i približno je ista kao kod ER mreža sa skoro istim brojem grana. Na primjer, koherentnost WS mreže s  $N = 500$ ,  $k = 50$  (i proizvoljno  $p$ ) je slična ER grafu s  $p = 0.1$ . 3.3 Modeliranje srednjih polja u mrežama povezanih oscilatora Veliki je izazov izabrati odgovarajući matematički objekat koji opisuje srednja polja u populaciji oscilatora povezanih kroz kompleksnu mrežu interakcija. Za dovoljno veliku mrežu može se smatrati da je doprinos svih (ili veći dio) oscilatora kolektivnoj dinamici veoma mali (zanemarljiv), te da se interakcije između oscilatora mogu aproksimirati uvođenjem jednog ili više srednjih polja. Međutim, situacija je u ovom slučaju mnogo komplikovanija, jer srednje polje nema isti efekat na sve oscilatore. Preciznije, dinamika različitih oscilatora se reguliše različitim srednjim poljima. 42 U ovom paragrafu uvodimo matematički model srednjih polja u mrežama povezanih oscilatora. Koncepti koji su uvedeni u ovom paragrafu su posebno transparentni kada se primjenjuju na globalno povezane populacije. U ovom slučaju, postoji globalno srednje polje koje se u svakom trenutku može predstaviti jedinstvenom Möbiusovom transformacijom. Ovo je objašnjeno u potparagrafu 3.3.1. U potparagrafu 3.3.2 raspravljamo o tome kako se ta ideja može prilagoditi kada se bavimo kompleksnim mrežama. Nakon toga u potparagrafu 3.3.3 je uveden matematički okvir za opisivanje srednjih polja u kompleksnim mrežama povezanih oscilatora. Temeljem toga konstruišemo statističku metodu računanja srednjih polja i primjenjujemo ga za karakterizaciju nekih regularnih i slučajnih mreža. 3.3.1 Srednja polja u globalno povezanoj populaciji U prvoj glavi smo rekli da kompleksna Riccatijeva obična diferencijalna jednačina (1.8) s  $\omega \in \mathbb{R}$  definiše protok na jediničnoj kružnici, tj. za zadane početne uslove  $z_j(0)$  na  $S^1$ , imamo da  $z_j(t) \in S^1$  za svako  $t > 0$ . Štaviše, može se pokazati da jednačina (1.8) definiše jednoparametarsku familiju Möbiusovih transformacija koja čuva jedinični disk. Zaista, Poincareova preslikavanja Riccatijevih jednačina su Möbiusove transformacije, vidjeti npr. u radovima [14, 16]. Međutim, u gore navedenom obrazloženju postoji veoma važna osobina. Pozivajući se na (1.8) kao Riccatijevu običnu diferencijalnu jednačinu, iz čega implicira da se može pretpostaviti da funkcija veze  $f$  zavisi samo o  $t$ , a ne i o  $z_1, \dots, z_N$ . Ovo je u suštini aproksimacija srednjeg polja. Usvajanjem toga mi smatramo da su jednačine za stanja oscilatora povezane samo kroz neku zajedničku kompleksnu funkciju  $f(t)$ . Za dovoljno veliku globalno povezanu populaciju ova aproksimacija je važeća i može se tretirati (1.8) kao Riccatijev protok na  $S^1$  s vremenski zavisnim koeficijentima  $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  i  $\omega \in \mathbb{R}$ . Dolazi do zapetljanije situacije ako veza nije globalna, tj. ako su oscilatori povezani kroz kompleksnu mrežu. Ovo će biti razmatrano u sljedećem potparagrafu. Započet ćemo definiranjem matematičkog modela jedinstvenog srednjeg polja u globalno povezanoj populaciji. Definicija 3.7. Srednje polje u globalno povezanoj populaciji (1.6) u momentu  $T \geq 0$  je Möbiusova transformacija  $MT \in GC$ , tako da su stanja svih oscilatora u momentu  $T$  zadana sa  $z_j(T) = MT(z_j(0))$ ,  $j = 1, \dots, N$ . 43 Iz MMS principa slijedi da takva Möbiusova transformacija postoji za svako  $T \geq 0$ . Svakoju Möbiusovoj

transformaciji koja čuva je- dinični disk (1.9) pridružujemo odgovarajući para- metar  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $|\alpha| < 1$ . Na ovaj način, srednje polje u globalno povezanoj populaciji (1.6) u momentu  $t > 0$  je predstavljeno tačkom  $\alpha(t)$  u jediničnom disku, koja zadovoljava prvu običnu diferencijalnu jednačinu u sistemu (1.10). Napomena 3.9. Geometrijsko značenje parametra  $\alpha(t)$  je također jasno izloženo u radu [63]. Evolucija stanja oscilatora je zadana odgovarajućom jednoparametarskom familijom Möbiusovih transformacija  $M_t \in GC$ . Tada, ispostavlja se da je  $\alpha(t)$  slika centra pod dejstvom familije  $M_t$ :  $\alpha(t) = M_t(0)$ . U izuzetnom slučaju, kada je početna raspodjela faza uniformna na  $[0, 2\pi]$ ,  $\alpha(t)$  je jednostavno centroid 1.0 0.5 0.0 ?0.5 ?1.0 ?1.0 ?0.5 0.0 0.5 1.0 Slika 3.5: Evolucija srednjeg polja na vremenskom intervalu  $t \in [0, 4]$  u populaciji od  $N = 500$  oscilatora s globalnom jačinom veze  $K = 2$ . stanja oscilatora u momentu  $t$ . Drugi parametar od  $M_t$ , ugao  $\psi(t) \in [0, 2\pi]$ , je ukupna rotacija oscilatora u vremenskom intervalu  $[0, t]$  i u suštini nije važna za karakterizaciju srednjeg polja. Jasno je da srednje polje evoluira s vremenom i njegova evolucija zavisi i od jačine veze i početnih stanja oscilatora.

3.3.2 Möbiusove transformacije u kompleksno j mreži oscilatora U potparagrafu 3.3.1 smo uveli matematičku definiciju (zapravo model) srednjeg polja u populaciji globalno povezanih oscilatora. Naš sljedeći cilj je da proširimo ovaj model kako bismo proučavali kompleksne mreže oscilatora. Razmotrimo (dovoljno veliku) mrežu  $N$  identičnih Kuramoto oscilatora (3.1). Radi bolje preglednosti, pretpostavimo da su početne faze oscilatora izabrane iz uniformne raspodjele na  $[0, 2\pi]$ :  $\phi_j(0) \in U[0, 2\pi]$ ,  $j = 1, \dots, N$ . Napišimo (3.1) u opštem obliku:  $\dot{\phi}^j = f_j e^{i\phi_j} + \omega + f^-j e^{-i\phi_j}$ ,  $j = 1, \dots, N$ . (3.3) Kao što je gore navedeno, stanje oscilatora  $j$  je predstavljeno kompleksnim brojem s modulom 1 (tačka na  $S^1$ )  $z_j(t) = e^{i\phi_j(t)}$ . Zamjenom u (3.3) se dobija sljedeći sistem običnih diferencijalnih jednačina:  $\dot{z}_j = i(f_j z_j^2 + \omega z_j + f^-j)$ ,  $j = 1, \dots, N$  (3.4) za neku funkciju veze  $f_j(t, z_1, \dots, z_N)$  i  $\omega \in \mathbb{R}$ . Fiksirajmo oscilator  $j$  i razmotrimo njegovu jednačinu (3.4). Strogo govoreći, ona nije Riccatijeva jednačina, pošto funkcija  $f_j$  zavisi o  $z_1, \dots, z_N$ . Međutim, shvatajući da je doprinos oscilatora  $j$  mrežnoj dinamici veoma mali, možemo zanemariti zavisnost funkcija  $f_1, \dots, f_N$  o  $z_j$  i smatrati (3.4) kao Riccatijevu jednačinu protoka na  $S^1$ :  $\dot{z}_j = i(f_j(t)z_j^2 + \omega z_j + f^-j(t))$ . (3.5) Očigledno, u globalno povezanoj (i velikoj) populaciji, svi oscilatori zadovoljavaju istu Riccatijevu jednačinu (1.8). U kompleksnim mrežama, različiti oscilatori zadovoljavaju različite jednačine (3.5). Naš pristup je baziran na detekciji grupa oscilatora koji (približno) zadovoljavaju istu Riccatijevu jednačinu. U cjelini, ako oscilator  $j$  zadovoljava Riccatijevu jednačinu protoka oblika (3.5), njegovo stanje evoluira pod dejstvom jednoparametarske familije Möbiusovih transformacija s parametrima  $\alpha(t)$  i  $\psi(t)$  koji zadovoljavaju sistem (1.10). Međutim, znajući dinamiku jednog oscilatora u vremenskom intervalu  $t \in [0, T]$  nije dovoljno da se utvrdi da li se kreće pod dejstvom Möbiusove grupe. Dejstvo Möbiusovih transformacija se može otkriti posmatranjem dinamike grupe koja se sastoji od  $p \geq 4$  oscilatora i računajući dvorazmjeru. Koristićemo ovu metodu u simulacijama u narednom potparagrafu.

3.3.3 Srednja polja u kompleksnim mrežama Kuramoto oscilatora Razmotrimo model (3.1) oscilatora povezanih kroz kompleksnu mrežu  $N$  s početnim fazama  $\phi_j(0)$  biranih iz uniformne raspodjele na  $[0, 2\pi]$ . Definicija 3.8. 1. Kažemo da je Möbiusova transformacija  $M$  prisutna u mreži  $N$  u momentu  $T \geq 0$ , ako postoje četiri oscilatora  $i, j, k, l$ , takva da  $z_i(T) = M(z_i(0))$ ,  $z_j(T) = M(z_j(0))$ ,  $z_k(T) = M(z_k(0))$ ,  $z_l(T) = M(z_l(0))$ . Drugim riječima,  $M$  je prisutna u mreži  $N$  u momentu  $T$ , ako se mogu naći četiri oscilatora u  $N$  koji se slažu s  $M$  u momentu  $T$ . 2. Pretpostavimo da je  $M$  prisutna u  $N$  u momentu  $T \geq 0$ . Tada, težina od  $M$  je  $4mN$ , gdje je  $m \leq N$  ukupan broj oscilatora koji leže u zajedničkom polju  $M$  u momentu  $T$ .

45 Definicija 3.9. Srednja polja u mreži  $N$  u momentu  $T \geq 0$  su Möbiusove transformacije koje su prisutne u  $N$  u momentu  $T$ . Težine srednjih polja u  $N$  su težine odgovarajućih Möbiusovih transformacija. Fiksirajmo skup početnih stanja oscilatora  $z_1(0), \dots, z_N(0)$  i moment  $T > 0$ . Označimo s  $Y_4$  skup svih četvorki  $\{i, j, k, l\}$  koji se slažu. Očigledno,  $Y_4$  je konačno, te ima najviše  $N_4$  elemenata. Svaki element iz  $Y_4$  definiše jedinstvenu Möbiusovu transformaciju u momentu  $T$ . Razmotrimo funkciju  $g_N : Y_4 \rightarrow GC$ , koja preslikava četvorce u Möbiusove transformacije. Domena funkcije  $g_N$  je konačan skup  $P \subseteq GC$  koji sadrži sve Möbiusove transformacije koje su prisutne u

N u momentu  $T$ . Svaka Möbiusova transformacija iz  $P$  je predstavljena odgovarajućim parametrom  $\alpha$ . Na ovaj način, srednja polja u  $N$  u momentu  $T \geq 0$  su predstavljena konačnim skupom ("oblakom") (težinskih) tačaka u  $D$ .

Pretpostavimo da srednja polja u mreži  $N$  u momentu  $T \geq 0$  su predstavljena "oblakom" tačaka  $\alpha_1, \dots, \alpha_p$  u  $D$  s odgovarajućim težinama  $w_1, \dots, w_p$ . Sljedeći koraci zahtijevaju pojam udaljenosti između tačaka  $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ . Podsjećajući se na to da su ove tačke slike nule pod nekim Möbiusovim transformacijama  $M_1, \dots, M_p$ , prirodno je koristiti hiperboličku udaljenost (Poincareov disk model, vidjeti [68]). Neka je  $w = w_1 + \dots + w_p$ . Definirajmo funkciju:  $f(\xi) = \sum_{k=1}^p w_k d(\xi, \alpha_k)$  gdje je  $d(\xi, \alpha) = \ln \frac{|\alpha - \xi| + |\xi - \alpha|}{|\alpha - \xi| - |\xi - \alpha|}$  hiperbolička udaljenost u  $D$  između tačaka  $\xi$  i  $\alpha$ . Funkcija  $f$  ima jedinstven ( $\cdot$ ) minimum  $B$  u  $D$ , kojeg zovemo Poincareov baricentar (ili, u opštem kontekstu, Karcherova sredina, vidjeti [9, 49]) skupa tačaka  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}$ . Definicija 3.10. Prosječno srednje polje u mreži  $N$  u momentu  $T \geq 0$  je Poincareov baricentar  $B(T)$  skupa  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_p\} \in D$ . Označimo s  $\kappa(T)$  vrijednost funkcije  $f$  u tački minimuma  $B(T)$ . Definicija 3.11. H-koherentnost mreže  $N$  u momentu  $T \geq 0$  je  $r(T) = 1 + \kappa(T)$ . Napomena 3.10.

Napomenimo da se h-koherentnost (hiperbolička koherentnost) mreže razlikuje od pojma koherentnosti, koji je uveden u prethodnom paragrafu. 46 1.0 1.0 1.0 0.5 0.5 0.5 0.0 ? 0.0 0.0 ? 0.5 0.5 0.5 ? ? 1.0 1.0 0.5 0.0 0.5 1.0 ? 1.0 1.0 0.5 0.0 0.5 1.0 ? 1.0 0.5 0.0 0.5 1.0 a) b) c) Slika 3.6: Srednja polja u ER grafu s  $d = 0.1$  u momentima  $T = 2, 25, 50$ . 1.0 1.0 1.0 ? 0.5 0.5 ? 0.5 ? 0.0 0.0 0.0 ? 0.5 0.5 0.5 ? 1.0 1.0 0.5 0.0 0.5 1.0 ? 1.0 1.0 ? 0.5 0.0 0.5 1.0 ? 1.0 0.5 0.0 0.5 1.0 ? 1.0 0.5 0.0 0.5 1.0 a) b) c) Slika 3.7: Srednja polja u ER grafu s  $d = 0.9$  u momentima  $T = 2, 3, 4$ . Napomena 3.11. Za zadanu mrežu  $N$ , prosječno srednje polje  $B(T)$  i h-koherentnost  $r(T)$  su funkcije koje zavise o vremenu. Napomena 3.12. Očigledno je da za globalno povezanu populaciju, koja je proučavana u potparagrafu 3.3.1,  $\kappa(T) = 0$  za svako  $T$ . Zbog toga, njena h-koherentnost je jednaka jedan za svako  $T$ . Kažemo da je to perfektna h-koherentna mreža. Za svaku drugu mrežu, imamo da je  $0 < r(T) < 1$ . Tipično, h-koherentnost je opadajuća funkcija koja zavisi o vremenu. Na slikama 3.6-3.10 su prikazana srednja polja različitih mreža. Metod simulacija je baziran na gore navedenim definicijama i lijepim osobinama matematičkih objekata koji se koriste. Međutim, kako bi proučavali kompleksne mreže, neke adaptacije i relaksacije su neophodne i kratko ćemo objasniti metodu (neki od narednih koraka su detaljnije objašnjeni u prethodnom paragrafu).

1. Slučajno izaberi početne faze  $\phi_1(0), \dots, \phi_N(0)$  iz uniformne raspodjele na  $[0, 2\pi]$ . 47 1.0 1.0 1.0 ? 0.5 0.5 ? 0.5 0.0 ? 0.0 0.0 ? 0.5 0.5 0.5 ? 1.0 1.0 0.5 0.0 0.5 1.0 ? 1.0 1.0 ? 0.5 0.0 0.5 1.0 ? 1.0 0.5 0.0 0.5 1.0 a) b) c) Slika 3.8: Srednja polja u ER grafovima s

(a)  $d = 0.1$ , (b)  $d = 0.5$  i (c)  $d = 0.9$  u momentu  $T = 5$ .

2

1.0 1.0 1.0 0.5 ? 0.5 0.5 ? ? 0.0 0.0 0.0 ? 0.5 0.5 0.5 ? 1.0 1.0 ? 0.5 0.0 0.5 1.0 ? 1.0 1.0 ? 0.5 0.0 0.5 1.0 ? 1.0 0.5 1.0 ? 1.0 0.5 0.0 0.5 1.0 a) b) c) Slika 3.9: Srednja polja u WS grafovima s

$k = 250$  i (a)  $\beta = 0.1$ , (b)  $\beta = 0.5$  i (c)  $\beta = 0.9$  u momentu  $T = 5$ .

2

2. Riješiti (3.1) za  $t \in [0, T]$  s tim početnim fazama da dobijemo faze oscilatora u momentu  $T$ :  $\phi_1(T), \dots, \phi_N(T)$ . 3. Zamjeniti  $z_j(0) = e^{i\phi_j(0)}$  i  $z_j(T) = e^{i\phi_j(T)}$  za  $j = 1, \dots, N$  da dobijemo stanja oscilatora u momentima  $t = 0$  i  $t = T$  kao tačke na  $S^1$ . 4. Slučajno izaberi 1000 četvorki oscilatora. Za svaku četvorku  $i, j, k, l$  provjeriti da li se slažu. Ovo se lako provjerava upoređivanjem dvo-razmjera tačaka  $z_i, z_j, z_k, z_l$  u momentima  $t = 0$  i  $t = T$ . Ako se dvorazmjera čuva, tada se  $i, j, k, l$  slažu.

Medutim, ovdje nam je potrebna fleksibilnost jer se dvorazmjera skoro nikada savršeno ne čuva u kompleksnoj mreži. Zbog toga, dozvoljavamo malu grešku, pretpostavljajući da se oscilatori slažu ako se dvorazmjera približno čuva do  $\epsilon = 10^{-2}$ . 48 1.0 1.0 0.5 0.5 0.0 ? 0.0 ?0.5 ?0.5 ?1.?01.0 ?0.5 0.0 0.5 1.0 ?1.?0 1.0 a) ? ?0.5 0.0 0.5 1.0 b) 1.0 0.5 0.0 ?0.5 ? 1.0?1.0 ? ?0.5 0.0 0.5 1.0 c) Slika 3.10: Srednja polja u mreži koja sadrži dvije perfektne koherentne zajednice s jačinom veze unutar zajednica  $K = 0.675$  i između zajednica  $v = 0.325$  u momentima  $T = 50, 200, 250$ . 5. Pretpostavimo da se oscilatori  $i, j, k, l$  (približno) slažu. Tada, koristeći dvorazmjera, tražimo sve oscilatore koji se (približno) slažu s trojkom  $i, j, k$ . Označimo s  $m \leq N$  ukupan broj oscilatora koji se slažu s  $i, j, k$  (računajući i njih). 6. Za četvorku  $i, j, k, l$ , odrediti njihovu Möbiusovu transformaciju  $M$  (s nekom malom greškom). Težina od  $M$  je  $4mN$ . 7. Zapisati  $M$  u obliku (1.9) kako bismo pronašli odgovarajuće  $\alpha$ . 8. Prikazati  $\alpha$  u  $D$  s odgovarajućom težinom. Mala greška se tolerira u koraku 4, i prema tome i u svim narednim koracima. Medutim, pošto je naš metod u suštini statistički, ova aproksimacija ne utiče značajno na rezultate simulacije. Srednja polja i h-koherentnost zavise i o topologiji mreže i o početnoj raspodjeli faza oscilatora. U ovom paragrafu pretpostavljamo da je raspodjela početnih faza uniformna kako bi se fokusirali samo na topologiju. Medutim, postoje i druge mogućnosti. Mogu se uporediti srednja polja u jednoj mreži za različite raspodjele početnih faza (na primjer, uzimanjem uniformne i von Misesove početne raspodjele). U svim simulacijama se koristi isti skup početnih faza. Ovo je pogodno kada se upoređuju dvije mreže kako bi se izbjegla dvosmislenost sa slučajnom srednjom fazom  $\mu(t)$ . Inače, kada razmatramo dvije mreže, treba uporediti dva skupa tačaka po modulu grupe rotacija u ravni  $SO(2)$ . Prikazujemo rezultate simulacija za neke Erdős-Renyi (ER) i Watts-Strogatz (WS) grafove (vidjeti [12, 102]). Na slikama 3.6 i 3.7, evolucija 49 WS graf s

$k = 50$	$\beta = 0$	$\beta = 0.1$	$\beta = 0.5$	$\beta = 0.9$	$\beta = 1$	H-	koherentnost	0.943087	0.959091	0.967391	2								
0.974499	0.974103	WS	graf s	$k = 250$	$\beta = 0$	$\beta = 0.1$	$\beta = 0.5$	$\beta = 0.9$	$\beta = 1$	H-		koherentnost							
0.253563	0.27055	0.723713	0.798361	0.801395	WS	graf s	$k = 450$	$\beta = 0$	$\beta = 0.1$	$\beta = 0.5$		$\beta = 0.9$	$\beta = 1$	H-	koherentnost	0.473923	0.480417	0.60308	0.638407

Tabela 3.1: H-koherentnost Watts-Strogatz grafova (jačina veze je  $K = 7$  i  $T = 3$ ). srednjih polja u ER grafovima s vjerovatnoćom povezivanja  $d = 0.1$  i  $d = 0.9$  su ilustrovani prikazivanjem slika u različitim momentima. Srednja polja u različitim ER i WS grafovima u momentu  $T = 5$  su prikazana na slikama 3.8 i 3.9. Jačina veze na grani je  $K = 2$  u svim simulacijama. Prosječno srednje polje (baricentar  $B(t)$ ) je predstavljen crnom zvijezdom na svim slikama. Uglavnom, slučajne mreže su koherentnije nego regularne. WS mreže postaju koherentnije kako se povećava vjerovatnoća uključivanja  $\beta$ , od minimalne koherentnosti s  $\beta = 0$  (perfektno regularna mreža), do maksimalne koherentnosti s  $\beta \rightarrow 1$  (dobija se perfektna slučajna mreža, tj. ER graf), vidjeti tabelu 3.1. Na slici 3.10 je prikazana evolucija srednjih polja u mreži s dvije perfektne zajednice (globalna veza, s jačinom veze unutar zajednice  $K = 0.675$ , koja je jača od veze između zajednica  $v = 0.325$ ). Ovaj model s faznim pomakom  $\gamma = \pi/2 - 0.1$  u vezi je najjednostavnija mreža kod koje dolazi do chimera stanja, vidjeti [1]. Kao što je očekivano, slika 3.10 prikazuje prisutnost dva dominantna srednja polja, stvorena unutar dvije zajednice. Kada se pojavi chimera stanje, ova dva polja se razilaze, jedan se kreće prema jediničnoj kružnici  $S^1$  a drugi izvodi (kvazi)periodičnu evoluciju prema unutrašnjosti diska  $D$ . Ovaj primjer pokazuje da srednja polja mogu biti vrlo osjetljiva na male fluktuacije u početnim uslovima. 50 3.4 Detekcija za jednica u kompleksnim mrežama Arenas i ostali ([7]) su predložili algoritam detekcije zajednica koji se oslanja na posmatranju procesa postepene sinhronizacije u mreži povezanih oscilatora i na taj način se otkriva topologija mreže. Shodno tome, može se očekivati da oscilatori koji





odgovaraju Möbiusovim transformacijama koje se određuju korištenjem koraka 1-5 algoritma objašnjenog u prethodnom potparagrafu. Prisustvo dvije zajednice je jasno vidljivo. Napomenimo da svaka tačka odgovara četvorki čvorova. Za preostale korake 6 i 7 je dovoljno koristiti jedan od poznatih algoritama. Također razmatramo još jedan primjer koji ilustruje naš metod identifikacije uticajnih čvorova. Razmotrimo mrežu koja se sastoji od tri zajednice, vidjeti sliku 3.13. U svakoj zajednici čvorovi su gusto povezani s vjerovatnoćom 0.9. Međutim, čvorovi koji pripadaju zajednicama A i C su direktno povezani samo s čvorovima iz srednje zajednice B s vjerovatnoćom 0.1. Pored toga, zajednice A i C sadrže po 250 čvorova i značajno su veće od B, koja sadrži samo 50 čvorova. Jasno je da se može reći da su čvorovi koji pripadaju zajednici B utjecajni u mreži jer su u suštini mala grupa medijatora u mreži. U tabeli 3.2 su navedeni stepeni korenspondencije deset slučajno izabranih oscilatora iz svake zajednice. Jasno je da čvorovi iz B imaju značajno niži stepen korenspondencije. To je prikazano na slici 3.14, gdje su čvorovi prikazani krugovima. Površina krugova je inverzno proporcionalna stepenima korenspondencije odgovarajućih čvorova. Drugim riječima, čvorovi s nižim stepenom korenspondencije su predstavljeni većim krugovima.

54 Glava 4 Ekstenzija modela Kuramoto na sferu  $S^3$  i neke primjene 4.1 Uvod U prvoj glavi smo vidjeli da se MMS princip oslanja na geometrijsko obrazloženje, posebno na osobinama Lie grupe jedinične kružnice  $S^1$  i grupe GC Möbiusovih transformacija koje djeluju na njemu [63]. Ovo zapažanje je glavni motiv da se analogna analiza može izvesti i na nekim višedimenzionim Lie grupama (bar na sferi  $S^3$ ) s intrigantnim interpretacijama. Ispostavilo se da je australijski fizičar Maks Lohe već 2009. godine uveo takav model u radovima [57, 58] i u njima diskutirao mnoga njegova svojstva kvantne sinhronizacije. Zatim je slijedio niz radova [21, 23, 24, 38] koji uopštavaju ovaj model i raspravljaju o njegovim dinamičkim i stacionarnim svojstvima. Pregled sinhronizacijskih modela, upoređivanje i kontrast klasične i kvantne sinhronizacije se može naći u ovom radu [36]. Lohe je razmatrao ekstenziju klasičnog modela Kuramoto (1.1) na grupu unitarnih matrica  $U(n)$ :  $iU_j' U_j^* = H_j - 2iK \sum_{i=1}^N (U_j U_i^* - U_i U_j^*)$ ,  $j = 1, \dots, N$ . (4.1) Ovo je sistem matričnih ODJ za kompleksne  $n \times n$  matrice  $U_j$ , te  $H_j$  su zadane Hermiteove matrice. Pojam  $U_j^*$  označava konjugiranu matricu matrice  $U_j$ . Sistem (4.1) se može smatrati kao sistem od  $n^2$  realnih ODJ. Napomenimo da (4.1) čuva  $U(n)$ , tj. ako početni uslovi zadovoljavaju  $U_j(0) \in U(n)$ , tada imamo da  $U_j(t) \in U(n)$  za svako  $t$ . Prateći terminologiju koju je uveo Lohe, pozivat ćemo se na (4.1) za  $n > 1$  kao neabelov model Kuramoto. Alternativno, istraživači ga također nazivaju model Lohe. Model opisuje kolektivno kretanje međusobno povezanih uopštenih oscilatora, čija stanja su zadana unitarnim matricama  $U_j(t)$ . Ovi uopšteni oscilatori se nazivaju kao Kuramoto-Lohe oscilatori. U odsustvu veze ( $K = 0$ ), ovi oscilatori zadovoljavaju jednostavne jednačine:  $U_j' = -iH_j U_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ . (4.2) Matrice  $iH_j$  pripadaju Lie algebri  $su(n)$ , i mi ćemo ih smatrati kao svojstvene uopštene frekvencije Kuramoto-Lohe oscilatora. Za jednodimenzioni slučaj kada je  $n = 1$ , (4.1) definiše kretanje na  $U(1)$ , što je upravo Abelov model Kuramoto (1.1):  $U_j := e^{-i\phi_j}$ ,  $H_j := \omega_j \in \mathbb{R}$ . Direktnim proračunom imamo:  $iU_j' U_j^* = \phi_j'$ ,  $U_j U_i^* - U_i U_j^* = e^{i(\phi_i - \phi_j)} - e^{-i(\phi_i - \phi_j)} = 2i \sin(\phi_i - \phi_j)$ . Tada sistem (4.1) postaje klasični model Kuramoto (1.1). Prelazak na sinhronizaciju je vrlo sličan u Abelovim i neabelovim modelima, tj. postoji kritična jačina snage  $K_c$  (koja zavisi od disperzije svojstvenih frekvencija), tako da se efekti sinhronizacije odvijaju za  $K > K_c$ , vidjeti [57, 58]. U ovoj glavi se fokusiramo na konkretni slučaj kada je  $n = 2$  koji odgovara kretanjima na  $SU(2)$  s grupnom mnogostrukošću  $S^3$ . Svojstvene uopštene frekvencije  $iH_j \in su(2)$  su antihermiteove matrice traga nula. Niskodimenzionu dinamiku modela (4.1) razmatramo u narednom paragrafu na sferi  $S^3$ . U paragrafu 4.3, neabelov model Kuramoto (4.1) primjenjujemo za neke važne zadatke u mašinskom učenju kao što su klasterizacija podataka u  $R^k$  i klasterizacija multivarijantnih funkcionalnih podataka.

4.2 Globalne promjenljive u idealnom neabelovom modelu Kuramoto na  $S^3$  Trenutno postoje dva uzbudljiva istraživanja. Proučavanje o niskodimenzionoj dinamici u Abelovom modelu Kuramoto koje je započeto 1994. godine, a 2009. godine su izloženi odnosi s hiperboličkom geometrijom i kompleksnom analizom. Druga linija istraživanja, inicirana od

strane Lohea 2009. godine, se provodi s neabelovim modelima Kuramoto na unitarnim grupama  $U(n)$  i razraduje nove paradigme kvantne sinhronizacije [5, 58]. U ovoj glavi se razraduje nastavak i kombinacija ova dva istraživačka smjera.

56 U narednom potparagrafu predstavljamo neabelov model Kuramoto, koji je opšta verzija modela Lohe na  $S^3$ . Jedna tehnička novina je ta da su promjenljive u jednačinama zapisane u kvaternionima. U potparagrafu 4.2.2 nudimo teorijski opis niskodimenzione dinamike u modelu kao kretanje na orbiti grupe (kvaternionskih) Möbiusovih transformacija. Parametri Möbiusovih transformacija su globalne promjenljive koje određuju evoluciju čitavog sistema. Dinamiku ovih globalnih promjenljivih daje uopšteni Watanabe-Strogatz sistem. Osim toga, ovo obrazloženje omogućava identifikaciju simetrija i konstanti kretanja. U potparagrafu 4.2.3 prelazimo na Hopfove (ugaone) koordinate na  $S^3$  i identifikujemo poseban oblik funkcije veze koja pretvara sistem u osnovni neabelov model Kuramoto. U potparagrafu 4.2.4 uvodimo dodatnu pretpostavku da je početna raspodjela oscilatora uniformna na  $S^3$ . Slično kao kod klasičnog modela Kuramoto, ova pretpostavka dovodi do daljnje redukcije dimenzije i jednostavne ODJ-e koja opisuje evoluciju parametra poretka. Na kraju, u potparagrafu 4.2.5 ističemo neke primjene modela u matematici i inženjerstvu.

4.2.1 Model povezanih uopštenih oscilatora na  $S^3$  Postoje različiti načini za predstavljanje koordinata na  $S^3$ . Za naše potrebe algebra kvaterniona je vjerovatno najprikladnija. Slijedeći analogiju s (1.7), razmotrimo jedan uopšteni oscilator čije se kretanje opisuje kvaternionskom običnom diferencijalnom jednačinom (KODJ):  $\dot{q} = wq + qu$ , (4.3) gdje je  $q(t)$  jedinični kvaternion, a  $w$  i  $u$  su "čisti" kvaternioni (to znači da je  $\text{Re}(w) = \text{Re}(u) = 0$ ). Skup jediničnih kvaterniona identifikovan je s Lie grupom  $S^3$  s odgovarajućom Lie algebrom koja se sastoji od čistih kvaterniona. Dakle, ako je početna tačka  $q(0)$  za (4.3) jedinični kvaternion, onda će rješenje  $q(t)$  biti jedinični kvaternion za svako  $t$ . Drugim riječima, kretanje (4.3) je ograničeno na  $S^3$ . Kažemo da je čestica opisana s (4.3) Kuramoto-Lohe (KL) oscilator sa svojstvenim frekvencijama  $w$  i  $u$ . Dalje, zasniva se ansambl koji se sastoji od  $N$  međusobno povezanih identičnih KL oscilatora koji zadovoljavaju kvaternionsku Riccatijevu diferencijalnu jednačinu:  $\dot{q}_j = q_j f q_j + w q_j + q_j u - f^-$ ,  $j = 1, \dots, N$ . (4.4) Ovdje,  $f = f(t, q_1, \dots, q_N)$  je kvaternionska funkcija, koja predstavlja vezu između KL oscilatora. Pojam  $f^-$  u (4.4) označava konjugirani kvaternion, tj. ako je  $f = f_1 + if_2 + jf_3 + kf_4$ , tada je  $f^- = f_1 - if_2 - jf_3 - kf_4$ . 57 Sistem (4.4) je neabelov model Kuramoto na  $S^3$  (ili model Lohe za  $n = 2$ ). Kao što ćemo vidjeti u potparagrafu 4.2.3, ono je uopštenje od (4.1) na isti način kao što je (1.2) uopštenje od (1.1). U ovom paragrafu glavni fokus je na niskodimenzionoj dinamici i teorijskim osobinama grupe za (4.4). Naglasimo da pretpostavljamo visoko idealiziranu postavku s ansamblom koji se sastoji od identičnih ( $w$  i  $u$  ne zavise o  $j$ ) i globalno povezanih ( $f$  ne zavisi od  $j$ ) KL oscilatora. da (4.4) čuva  $S^3$ . Može se potvrditi da  $q_j(0)q_j^-(0) = 1$  implicira  $\text{ddt}(q_j(t)q_j^-(t)) = 0$ , što znači U zaključku, spomenimo da su kvaternionske Riccatijeve diferencijalne jednačine oblika (4.4) proučavane u nekoliko radova [28, 104, 108].

4.2.2 Niskodimenziona dinamika globalno povezanih uopštenih oscilatora na  $S^3$  Označimo s  $H$  algebru kvaterniona. Skup Möbiusovih (linearnih frakcionih) transformacija koje djeluju na četverodimenzionoj sferi  $H \cup \{\infty\}$  je grupa  $GL(2, H)$ . Tada se Lie algebra od  $GL(2, H)$  sastoji od matrica koje generišu vektorska polja oblika  $q f q + b q + q c + g$ , gdje su  $f, b, c, g \in H$  proizvoljni kvaternioni. jediničnu sferu  $S^3$ . Ova podgrupa ima Lie algebru koja se sastoji od matrica Razmotrimo podgrupu  $GH \subset GL(2, H)$  svih transformacija koje čuvaju koje generišu vektorska polja  $s g = -f^-$  i  $\text{Re}(b) = \text{Re}(c) = 0$  [33]. Stoga, dinamika KRDJ (4.4) se može opisati u smislu dejstva Möbiusovih transformacija koje čuvaju  $S^3$ . Da bismo to detaljnije istražili, razmotrimo opštu Möbiusovu transformaciju koja čuva  $S^3$ :  $M(q) = p(1 - q\bar{a})^{-1}(q - a)r$ , za neke jedinične kvaternione  $p$  i  $r$ , i kvaternion  $a \in H$ ,  $|a| < 1$ . Inverzna transformacija daje malo drugačiju parametrizaciju:  $G(q) = (p^- q r^- + a)(1 + \bar{a} p^- q r^-)^{-1}$ . (4.5) Teorema 4.1. Razmotrimo ansambl od  $N$  povezanih čestica čija je dinamika određena s (4.4) s početnim uslovima  $q_1(0), \dots, q_N(0)$ . Tada,  $q_j(t) = G_t(q_j(0))$  za neku jednoparametarsku familiju transformacija  $G_t$  koje pripadaju  $GH$ . Štaviše, parametri  $a(t), p(t)$  i  $r(t)$  od  $G_t$  zadovoljavaju sljedeći sistem KODJ-a:  $\dot{a} = af a + wa + au - f^-$ ;  $\left. \begin{array}{l} \dot{p} = -p(w + af - \bar{a}f^-); \\ \dot{r} = -r(u - af + \bar{a}f^-). \end{array} \right\} (4.6)$  58

Dokaz. Ovdje ćemo kratko dati račun koji se koristio u izvodenju sistema (4.6). Računanje je prilično glomazno zbog nedostatka komutativnosti u algebri kvarterniona. Fiksirajmo baznu tačku  $k \in S^3$ , i neka je  $q = G(k)$ . Iz jednačine (4.5), dobivamo:  $q(1 + \bar{a}p^{-1}kr^{-1}) = p^{-1}kr^{-1} + a$ , a zatim direktno deriviramo gore navedenu jednačinu, držeći  $k$  konstantnom:  $q' = [p^{-1}kr^{-1} + p^{-1}kr^{-1} + \dot{a} - q(\dot{a}p^{-1}kr^{-1} + \bar{a}p^{-1}kr^{-1} + \bar{a}p^{-1}kr^{-1})] \times (1 + \bar{a}p^{-1}kr^{-1})^{-1} = (p^{-1}kr^{-1} + p^{-1}kr^{-1} + \dot{a} - q\bar{a}p^{-1}kr^{-1} - q\bar{a}p^{-1}kr^{-1} - q\bar{a}p^{-1}kr^{-1}) \times (p^{-1}kr^{-1} + a)^{-1} q$ . Pretvaranje jednačine za  $q = G(k)$  daje:  $(p^{-1}kr^{-1} + a)^{-1} = 1 - \|a\|^2 - 1 (q^{-1} - \bar{a})$ . Zamjenjujući ovo u (4.7) dobivamo:  $q' = (1 - \|a\|^2)^{-1} [(1 - q\bar{a})p^{-1}p(1 - q\bar{a})^{-1}(q - a) + (q - a)rr^{-1} + \dot{a} - q\bar{a}'(1 - q\bar{a})^{-1}(q - a)] (q^{-1} - \bar{a})q = (1 - \|a\|^2)^{-1} (1 - q\bar{a})p^{-1}p \|1 - q\bar{a}\|^{-2} \|q - a\|^2 q + (q - a)rr^{-1}(1 - [\bar{a}q] + \dot{a}(1 - \bar{a}q) - q\bar{a}' \|1 - q\bar{a}\|^{-2} \|q - a\|^2 q$ . Pošto je  $\|1 - q\bar{a}\|^2 = \|q\|^2 \cdot \|q^{-1} - \bar{a}\|^2 = \|q - a\|^2$ , imamo:  $q' = (1 - \|a\|^2)^{-1} [p^{-1}pq - q\bar{a}p^{-1}pq - p^{-1}pa + q\bar{a}p^{-1}pa + qrr^{-1} - arr^{-1} - qrr^{-1}\bar{a}q + arr^{-1}\bar{a}q + \dot{a} - \dot{a}\bar{a}q - q\bar{a}'q + q\bar{a}'a]$ . Upoređujući ovo s (4.4), dobivamo sljedeći sistem:  $(1 -$

$$\|a\|^2)^{-1} (-\bar{a}p^{-1}p - rr^{-1} - \dot{a} - \bar{a}') = f; \quad (1 - \|a\|^2)^{-1} (p^{-1}p + arr^{-1} - \bar{a}) = g \quad (15)$$

$- \dot{a}\bar{a}) = \omega$ ;  $(1 - \|a\|^2)^{-1} (\bar{a}p^{-1}pa + rr^{-1} + \dot{a}\bar{a}) = u$ ;  $(1 - \|a\|^2)^{-1} (-p^{-1}pa - arr^{-1} + \dot{a}) = -f'$ . (4.7) (4.8) Sistem (4.8) se može algebarski preurediti da se dobije sistem KODJ-a (4.6). \* Sistem (4.6) je analog (ili ekstenzija) Watanabe-Strogatz sistema (1.10). Gornji teorem uspostavlja niskodimenziono ponašanje (4.4), tj. dinamika je ograničena na  $B^4 \times S^3 \times S^3$ , što je podmnogostrukost realne dimenzije 10. Ovdje,  $B^4$  označava jediničnu kuglu u četverodimenzionom prostoru. 59 Napomena 4.1. Möbiusova transformacija  $G$  je parametrizirana na takav način da je  $G(0) = a$  (vidjeti formulu (4.5)). Dalje, primjetimo da je KODJ za  $a(t)$  u (4.6) ista kao jednačine (4.4) za  $q$ . Razmatrajući ekstenziju  $Gt$  sa  $S^3$  na jediničnu kuglu  $B^4$ , jasno vidimo da je  $a(t)$  slika nule pod dejstvom  $Gt$ , tj.  $a(t) = Gt(0)$ . Sada nije teško pogoditi šta bi bile konstante kretanja od (4.4). U našem slučaju, kvaternionske dvorazmjere:  $Q(q_i, q_j, q_k, q_l) = (q_j - q_i)^{-1}(q_l - q_i)(q_l - q_k)^{-1}(q_j - q_k)$ ,  $1 \leq i, j, k, l \leq N$  (4.9) su konstante kretanja. Kvaternionska Möbiusova transformacija nije jedinstveno određena njenim dejstvom na četiri tačke, jer postoje i neke dodatne invarijante (zajedno s dvorazmjerom) [35]. 4.2.3 Dinamika u Hopfovima koordinatama i neke specijalne funkcije veze U ovom potparagrafu ćemo koristiti Cayley-Dicksonov oblik koji omogućava predstavljanje kvaterniona parom kompleksnih brojeva, tj.  $q = q_1 + q_2j$ ,  $f = f_1 + f_2j$ , gdje su  $q_1, q_2, f_1, f_2$  kompleksni brojevi. Što se tiče čistih kvaterniona, označavat ćemo ih s  $w = iwa + w_2j$ ,  $u = iua + u_2j$ , gdje je  $w_a, u_a \in \mathbb{R}$ ,  $w_2, u_2$  su kompleksni brojevi. Jedinični kvaternion  $q$  se također može napisati u ugaonim promjenljivim:  $q = q_1 + q_2j$ , gdje je  $q_1 = e^{i\phi} \cos \theta$ ,  $q_2 = e^{i\psi} \sin \theta$ ,  $s, \phi, \psi \in (0, 2\pi)$ ,  $\theta \in (0, \pi/2)$ . Zamjenom u (4.4) dobivamo sljedeći sistem ODJ za  $j = 1, \dots, N$ : 
$$\begin{cases} u_2 \tan(\theta_j) e^{i(\phi_j - \psi_j)} + w_2 \tan(\theta_j) e^{-i(\phi_j + \psi_j)} + \dot{\phi}'_j = w_a + u_a + 2i(\bar{u}_2 \tan(\theta_j) e^{-i(\phi_j - \psi_j)} - w_2 \tan(\theta_j) e^{i(\phi_j + \psi_j)} - \cos(\theta_j)(f^{-1}e^{-i\phi_j} - f_1 e^{i\phi_j}); \\ u_2 \cot(\theta_j) e^{i(\phi_j - \psi_j)} - w_2 \cot(\theta_j) e^{-i(\phi_j + \psi_j)} + \dot{\psi}'_j = w_a - u_a + 2i(\bar{u}_2 \cot(\theta_j) e^{-i(\phi_j - \psi_j)} + w_2 \cot(\theta_j) e^{i(\phi_j + \psi_j)} - \sin(\theta_j)(f^{-2}e^{i\psi_j} - f_2 e^{-i\psi_j}); \\ i \theta'_j = 12(\bar{u}_2 e^{-i(\phi_j - \psi_j)} + w_2 e^{i(\phi_j + \psi_j)} + u_2 e^{i(\phi_j - \psi_j)} + w_2 e^{-i(\phi_j + \psi_j)}) + \sin(\theta_j)(f_1 e^{i\phi_j} + f^{-1}e^{-i\phi_j}) + \cos(\theta_j)(f_2 e^{-i\psi_j} + f^{-2}e^{i\psi_j}). \end{cases}$$
 Ova zamjena vrijedi za  $\theta \neq 0$  i  $\theta \neq \pi/2$ . Uprkos naizgled komplikovanim (4.10) izrazima, ODJ-e za uglove pružaju neki osjećaj o dinamici. Prvo, primjetimo da veza (izrazi koji sadrže  $f_1$  ili  $f_2$ ) ulazi u jednačine na prilično jednostavan način, slično klasičnom modelu Kuramoto (1.6). Drugo, ugao  $\phi_j$  je povezan samo indirektno s uglom  $\psi_j$  za  $i \neq j$ , preko ugla  $\theta_j$ . Zanimljivo je da je kvaternion veze  $f = f_1 + f_2j$  podjeljen tako što je kompleksan broj  $f_1$  odgovoran za vezu ugla  $\phi_j$ , dok je  $f_2$  za vezu ugla  $\psi_j$ . Ova zapažanja daju nagovještaj kako odabrati određeni oblik kvaternionske funkcije  $f$  zavisno o određenim ciljevima. Na primjer, postavimo da je: 
$$\begin{cases} \dot{\phi}'_j = w_a + u_a + 2i(\bar{u}_2 \tan(\theta_j) e^{-i(\phi_j - \psi_j)} - w_2 \tan(\theta_j) e^{i(\phi_j + \psi_j)} - u_2 \tan(\theta_j) e^{i(\phi_j - \psi_j)} + w_2 \tan(\theta_j) e^{-i(\phi_j + \psi_j)}) + N \cos(\theta_j) (\sin(\phi_i - \phi_j + \theta_i) + \sin(\phi_i - \phi_j - \theta_i)); \\ \dot{\psi}'_j = w_a - u_a + u_2 \cot(\theta_j) e^{i(\phi_j - \psi_j)} - w_2 \cot(\theta_j) e^{-i(\phi_j + \psi_j)} + 2i(\bar{u}_2 \cot(\theta_j) e^{-i(\phi_j - \psi_j)} + w_2 \cot(\theta_j) e^{i(\phi_j + \psi_j)} - N \sin(\theta_j) K (\cos(\psi_i - \psi_j - \theta_i) - \cos(\psi_i - \psi_j + \theta_i)); \\ i \theta'_j = \end{cases}$$
 (4.11)

$12(\bar{u}2e^{-i(\phi_j-\psi_j)} + w^{-2}e^{i(\phi_j+\psi_j)} + u2e^{i(\phi_j-\psi_j)} + w2e^{-i(\phi_j+\psi_j)}) - K \sin N(\theta_j) (\cos(\phi_i - \phi_j - \theta_i) + \cos(\phi_i - \phi_j + \theta_i)) + N \sum_{i=1}^K \cos(\theta_j) \sum_{i=1}^N (\sin(\psi_i - \psi_j + \theta_i) - \sin(\psi_i - \psi_j - \theta_i))$ . N  $\sum_{i=1}^N$  Veza | Uje privlačna ako je  $K > 0$ , u ovom slučaju sistem evoluira prema sinhronizaciji za bilo koje početne uslove (naglasimo da pretpostavljamo da su identične uopštene frekvencije i globalna veza). Može se pokazati da je sinhronizacija (potpuno koherentno stanje) jedina asimptotski stabilna konfiguracija za  $K > 0$  [90]. Situacija je suptilnija za slučaj odbojne veze,  $K < 0$ . Za skoro sve početne uslove sistem evoluira prema potpuno nekoherentnom stanju. Zapravo, sistem konvergira prema potpuno nekoherentnom stanju kad god početna raspodjela ne sadrži većinski klaster, što znači da ne postoji  $N/2$  oscilatora u istoj tački. S obzirom na početnu raspodjelu KL oscilatora, ovo potpuno nekoherentno stanje je jedinstveno (do rotacije), to je privlačna fiksna tačka na orbiti grupe GH. Chen i ostali su u radu [20] predstavili detaljan i rigorozan matematički opis fiksnih tačaka na orbitama grupe GC za model Kuramoto na  $S^1$ .

61 1.0 0.8 0.6 0.4 0.2 0.0 0 2 4 6 8 10 12 14 a) 1.0 0.8 0.6 0.4 0.2 0.0 0 2 4 6 8 10 12 14 b) Slika 4.1: Evolucija globalnog parametra poretka  $\rho$  (a) i ugaonih parametara poretka  $\rho\phi$  (puna linija) i  $\rho\psi$  (isprekidana linija) (b) za sistem (4.4) s funkcijom veze (4.12). Simulacija se izvodi za  $N = 100$  KL oscilatora, s jačinom veze  $K = 0.5$ . Početni uslovi su birani iz uniformne raspodjele na  $S^3$ . Da bi ilustrovali gore pomenutu diskusiju, uvedimo globalni realni parametar poretka sistema na standardni način:  $\rho = \langle |q| \rangle$ , gdje je  $\langle q \rangle = N^{-1} \sum_{i=1}^N q_i$ .  $\sum_{i=1}^N f = -K N \langle q^{-1} \rangle = -\langle q^{-1} \rangle$ ,  $K \sum_{i=1}^N$  gdje  $\langle q \rangle = N^{-1} \sum_{i=1}^N q_i \in B^4$  označava centroid (centar mase) tačaka  $q_1, \dots, q_N \in S^3$ . Ovim specifičnim izborom funkcije veze  $f$ , sistem (4.10) se zapisuje na sljedeći način: Tada vrijednosti  $\rho = 1$  i  $\rho = 0$  globalnog parametra poretka odgovaraju koherentnom stanju (sinhronizacija) i potpuno nekoherentnom stanju respektivno. Uz globalni parametar poretka u ovom modelu također ima smisla definirati ugaone parametre poretka  $\rho\phi$  i  $\rho\psi$  na sljedeći način:  $N \rho\phi(t) e^{i\mu(t)} = \sum_{i=1}^N e^{i\phi_i(t)}$ ,  $\rho\psi(t) e^{i\nu(t)} = \sum_{i=1}^N e^{i\psi_i(t)}$ . Slika 4.1 ilustrira evoluciju prema koherentnom stanju za  $K = 0.5$ , globalnog parametra poretka (a) i ugaonih parametara poretka (b), koji se postepeno povećavaju prema 1. Početni uslovi su birani iz uniformne raspodjele na  $S^3$ .

62 1.0 0.8 0.6 0.4 0.2 0.0 0 2 4 6 8 10 12 14 a) 1.0 0.8 0.6 0.4 0.2 0.0 0 2 4 6 8 10 12 14 b) Slika 4.2: Evolucija globalnog parametra poretka  $\rho$  (a) i ugaonih parametara poretka  $\rho\phi$  (puna linija) i  $\rho\psi$  (isprekidana linija) (b) za (4.4) s funkcijom veze (4.12). Simulacija se izvodi za  $N = 100$  KL oscilatora, s jačinom veze  $K = -0.5$ . Početni uslovi su birani iz von Mises-Fisherove raspodjele na  $S^3$  sa smjerom srednje vrijednosti  $\mu = (0.5, 0.5, 0.5, 0.5)$  i koncentracijskim parametrom  $\kappa = 2$ .

10 12 14 a) 1.0 0.8 0.6 0.4 0.2 0.0 0 2 4 6 8 10 12 14 b) Slika 4.3: Evolucija globalnog parametra poretka  $\rho$  (a) i ugaonih parametara poretka  $\rho\phi$  (puna linija) i  $\rho\psi$  (isprekidana linija) (b) za (4.4) s funkcijom veze (4.13). Simulacija se izvodi za  $N = 50$  KL oscilatora, s jačinom veze  $K = 2$  i faznim pomacima  $\alpha = \beta = \pi/2$ . Početni uslovi su birani iz uniformne raspodjele na  $S^3$ . teže nuli, je prikazana na slici 4.2. Početni uslovi u ovoj simulaciji su birani iz von Mises-Fisherove raspodjele na  $S^3$  sa smjerom srednje vrijednosti  $\mu = (0.5, 0.5, 0.5, 0.5)$  i koncentracijskim parametrom  $\kappa = 2$ . Napomena 4.2.

Naglasimo da je funkcija veze oblika (4.12) je samo jedna mogućnost za model (4.4). U mnogim situacijama bi bilo interesantno razmotriti neke druge funkcije veza. Na primjer, mogu se definirati fazni pomaci uz uglove  $\phi$  i  $\psi$  na sljedeći način:  $f(q_1, \dots, q_N) = f_1(q_1, \dots, q_N) + f_2(q_1, \dots, q_N)$ , (4.13) gdje su kompleksne funkcije  $f_1$  i  $f_2$  definisane s:  $f_1 = -2KN \sum_{i=1}^N e^{-i(\phi_i - \alpha)} \cos \theta_i$ ,  $N \sum_{i=1}^N$   $f_2 = K \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N e^{i(\psi_i - \beta)} \sin \theta_i$ . Slika 4.3 ilustrira evoluciju globalnog (a) i ugaonih (b) parametara poretka za fazne pomake  $\alpha = \beta = \pi/2$ . Može se vidjeti da globalni parametar poretka ostaje gotovo konstantan oko 0.2, dok ugaoni parametri poretka vrše nepravilne oscilacije približno u anti-fazi jedan prema drugom. Početni uslovi za sliku 4.3 su birani iz uniformne raspodjele. Napomena 4.3. Zamjenom (4.12) i postavljanjem da je  $u = 0$  u (4.4) se dobija:  $N \dot{q}^j = -K q^j q^{-i} q^i + w q^j + K N q^i$  (4.14) što je upravo osnovni neabelov model Kuramoto (4.1) na  $S^3$ .  $2N \sum_{i=1}^N$   $2N \sum_{i=1}^N$  Da bi se ovo videlo, množi se (4.1) s  $-i$  i s matricama  $U_j$  s desne strane. Napomenimo da

su  $-iH_j$  antihermiteove  $2 \times 2$  matrice traga nula koje sadrže Lie algebru  $su(2)$ . Koristeći izomorfizam između Lie grupa, predstavljamo matrice  $U_j \in SU(2)$  kao jedinične kvaternione i  $-iH_j \in su(2)$  kao čiste kvaternione. Na taj način, model (4.1) se zapisuje kao (4.14).

#### 4.2.4 Uniformna početna raspodjela daje 4D dinamiku

Kao i kod Abelovog modela Kuramoto (1.6), postoji poseban slučaj kada je dinamika (4.4) u potpunosti određena jednim kvaternionskim parametrom  $a$  u (4.5). U ovom slučaju jednačine za  $p$  i  $r$  u (4.6) odvajaju se iz jednačine za  $a$  i dinamika je ograničena na 4-dimenzionu invarijantnu podmnogostrukturu. Razmotrimo (4.4) u termodinamičkoj granici,  $N \rightarrow \infty$ , i pretpostavimo da je početna raspodjela KL oscilatora uniformna na  $S^3$ . Tada se raspodjela razvija na podmnogostrukost koja se sastoji od mjera koje se dobijaju kao Möbiusove transformacije uniformne Lebesgueove mjere na  $S^3$ . Poznato je da Möbiusove transformacije uniformne mjere na  $S^3$  daju harmonične mjere (ili, u vjerovatnosnom terminu, umotane Cauchyjeve raspodjele [51]) s funkcijom gustoće:  $1 - |a(t)|^2 \rho(y; a(t)) = 2\pi^2 (1 - |a(t)|^2)^{-3/2}$ ,  $y \in S^3$ , gdje je  $a(\cdot) \in B^4$  parametar raspodjele.

#### 6.4 Napomena 4.4. Za datu raspodjelu vjerovatnoće na $S^3$ , možemo se fokusirati na dvije važne tačke u $B^4$ :

centroid (centar mase)  $\langle q \rangle(t)$  i konformni baricenter [29]  $a(t)$ . Postoji posebna karakteristika slučaja kada je početna raspodjela uniformna, a to je da se samo u ovom slučaju ove dvije tačke poklapaju. Drugim riječima, samo u ovom slučaju centroid je slika nule pod dejstvom jednoparametarske familije  $G_t$  Möbiusovih transformacija (vidjeti napomenu 4.1). Razmotrimo osnovni neabelov model Kuramoto i pretpostavimo da je početna raspodjela uniformna na  $S^3$ . Samo u ovom konkretnom slučaju, evolucija realnog parametra poretka  $\rho(t) = |\langle q \rangle|$  je zadana jednostavnom (realnom) ODE-om:  $\dot{\rho} = \rho - \rho^3$ . Kao što je vidljivo, 4.2.5 Potencijalne primjene Varijacije klasičnog modela Kuramoto su se našle u zanimljivim (a ponekad i neočekivanim) primjenama u različitim oblastima [2, 8, 83]. U ovom potparagrafu ističemo neke potencijalne primjene modela (4.4). Počnimo s jednom čisto matematičkom primjenom. Pretpostavimo da je zadana vjerovatnosna mjera  $\mu$  na  $S^3$ . Pretpostavimo da  $\mu$  ne sadrži atome s težinom  $\geq 1/2$ . Tada, konformni baricenter  $\mu$  se može naći rješavanjem osnovnog neabelovog modela Kuramoto (4.11) sa  $K < 0$  i s početnim uslovima koji su birani iz mjere  $\mu$ . Ovo dodatno omogućava izračunavanje Douady-Earlejeve ekstenzije [29] homeomorfizma  $f : S^3 \rightarrow S^3$  u samopreslikavanju lopte  $B^4$ . Kako bismo nastavili s nekim inženjerskim primjenama, ističemo neke veze između neabelovog modela Kuramoto i algoritama iz teorije geometrijskog konsenzusa. Teorija geometrijskog konsenzusa je nedavno razvijena poddisciplina u širokom polju distribuiranog i kooperativnog upravljanja koja se bavi zadacima konsenzusa i koordinacije na određenim neeuclidskim (naročito homogenim) prostorima [89, 90]. Općenito, na matričnim Lie grupama  $SO(n)$  i  $SU(n)$  postoji značajna klasa zadataka konsenzusa s brojnim primjenama u robotici, svemirskoj navigaciji i upravljanju roja (engl. swarm control) [72, 87]. Algoritam konsenzusa se dobija primjenom metode gradijentnog spuska na zadatku minimizacije potencijalne funkcije. Ovaj sistem gradijentnog spuska je neabelov model Kuramoto model (4.1) s nultim uopštenim frekvencijama  $H_j \equiv 0$ . Jedan poseban slučaj od posebne važnosti je konsenzus na Lie grupama  $S^3$  i  $SO(3)$ . To je zbog činjenice da kvaternioni pružaju prikladan način ideja je objašnjena u radu [45] za slučaj u ravni. 65 za rad s rotacijama u 3D prostoru, u stvari, to je bila izvorna motivacija Hamiltonu da uvede tu algebru 1843. godine. Predstavljanje 3D rotacija s jediničnim kvaternionima se temelji na dvostrukoj pokrivenosti preslikavanja iz  $S^3$  u  $SO(3)$ . Algoritmi konsenzusa i koordinacije na  $S^3$  i  $SO(3)$  rješavaju neke važne zadatke u svemirskoj navigaciji kao što su sinhronizacija držanja i formacije letenja. Sistem (4.4) s funkcijom veze (4.12) daje algoritam za konsenzus (za  $K > 0$ ) i balansiranje (za  $K < 0$ ). Potpuno nekoherentna stanja se tipično nazivaju kao balansirana stanja u teoriji distribuiranog upravljanja. Za neke druge koordinacione zadatke se mogu razmatrati različite funkcije veze  $f$ , jedan primjer je objašnjen u napomeni 4.2. Međutim, naglasimo da (4.4) s opštom funkcijom veze  $f$ , različitom od (4.12), ne pokazuje potencijalnu dinamiku, tj. nije sistem gradijentnog spuska za bilo koju funkciju cilja. U narednoj glavi razmatramo detaljnije ove zadatke. Napomenimo da se kvaternionske Möbiusove transformacije koriste u dizajniranju konformnih deformacija

mreža u 3D prostoru s primjenama u animaciji i grafici [99]. To znači da (4.4) pruža način izračunavanja i dinamičkog generiranja kontinuiranih konformnih deformacija 3D mreža. U narednom paragrafu razmatramo primjenu modela (4.4) na klasterizaciju podataka u  $R^n$  i klasterizaciji multivarijantnih funkcionalnih podataka.

### 4.3 Primjena neabelovog modela Kuramoto na klasterizaciji podataka

Postoji manje važan pristup klasteriranju, inspirisan samoorganizacijom u kompleksnim sistemima, naročito sinhronizacijom u modelu Kuramoto povezanih oscilatora [52]. Međutim, efikasno klasteriranje multivarijantnih podataka zahtijeva ekstenziju klasičnog modela Kuramoto na više dimenzije. Jedna takva metoda je predložena u [65], tako što su multivarijantni podaci unešeni u vektore prirodnih "frekvencija" u specifičnom dinamičkom sistemu na  $R^m$  koji podsjeća na model Kuramoto. U radu [94] (vidjeti također [70]) frekvencije su uklonjene iz modela i multivarijantni podaci se uzimaju kao početni uslovi. Međutim, obje metode uključuju vezu susjeda i, općenito, zahtijevaju ponovno izračunavanje poparnih udaljenosti između vektora podataka u svakom koraku. Prema tome, može se smatrati da su ove metode zasnovane na udaljenosti podataka. Neabelovi modeli Kuramoto oblika (4.1) su najadekvatnije ekstenzije modela Kuramoto na više dimenzije. To omogućava mogućnost dizajniranja metode klasteriranja zasnovane na ovom modelu uz globalnu vezu, što vodi do značajnog pojednostavljenja u implementaciji i smanjenja računске složenosti. U ovom paragrafu pokazujemo da neabelovi modeli Kuramoto pružaju prirodni okvir za klasteriranje multivarijantnih podataka zasnovanih na sinhronizaciji. U ovom okruženju ne treba uzimati u obzir bližnje susjede i ponovo izračunavati poparne udaljenosti između oscilatora u svakom koraku. Umjesto toga, veza je globalna i konstantna, početni uslovi su slučajno izabrani i podaci se unose u matrice frekvencija KL oscilatora. Osnovna ideja je da će se KL oscilatori s bliskim svojstvenim frekvencijama prvo sinhronizovati i na taj način otkriti hijerarhijsku strukturu klastera u skupu podataka.

#### 4.3.1 Algoritam

Naš metod se zasniva na neabelovim modelima Kuramoto. Ovakve modele je prvi put predstavio Lohe u radu [57]: 
$$\dot{U}_j = H_j U_j + U_j G_j + 2N \sum_{i=1}^N (U_j U_i^* U_j - U_i), \quad j = 1, \dots, N. \quad (4.15)$$
 Ovdje su  $U_j(t) \in U(n)$  unitarne matrice, koje predstavljaju stanja oscilatora.  $H_j$  i  $G_j$  pripadaju Lie algebri  $u(n)$  koja se sastoji od  $n \times n$  antihermiteovih matrica. Ove matrice se tumače kao svojstvene frekvencije oscilatora. Pojam  $U_i^*$  označava konjugirano transponiranu matricu matrice  $U_i$ . Na kraju,  $K$  je globalna jačina veze u sistemu. Važno je da (4.15) definiše dinamiku na grupi  $U(n)$ , što znači da  $U_j(0) \in U(n)$  za svako  $j = 1, \dots, N$  implicira da  $U_j(t) \in U(n)$  za svako  $t > 0$ . Nadalje, neka je  $m$  podalgebra od  $u(n)$  i  $M$  odgovarajuća podgrupa od  $U(n)$ . Pretpostavimo da  $U_j(0) \in M$  za svako  $j = 1, \dots, N$ , i da  $H_j$  i  $G_j$  pripadaju  $m$ . Zatim, dinamika od (4.15) se odvija na podgrupi  $M \subset U(n)$ , to je  $U_j(t) \in M$  za svako  $t > 0$ . Napomenimo da smo dodali dodatni član u neabelov model Kuramoto, a to je drugi član s desne strane u (4.15). Taj član je odsutan u originalnom modelu (4.1). Na taj način, svaki KL oscilator ima dvije matrice svojstvenih frekvencija  $H_j$  i  $G_j$ . Ovo blago uopštenje omogućava dvostruko veću dimenziju podataka. U principu, u zavisnosti od dimenzije vektora podataka, može se koristiti (4.15) na  $U(n)$  za proizvoljno  $n$ . Zbog jednostavnosti se fokusiramo na slučaj kada je  $n = 2$ , tj. na neabelovom modelu Kuramoto na  $SU(2)$ . To podrazumijeva ograničenje dimenzije multivarijantnih podataka, tj. pretpostavljamo da se podaci mogu predstaviti kao vektori u prostoru  $R^k$  za  $k \leq 6$ . Drugim riječima, mi identifikujemo klustere u skupovima podataka gdje svaki objekat nije zadan s više od 6 atributa.

67 Sada ćemo detaljnije objasniti metodu. Pretpostavimo da skup podataka sadrži  $N$  objekata, koji su predstavljeni vektorima  $a_1, \dots, a_N$  u  $R^k$  s  $k \leq 6$ . Svaki vektor  $a_j$  se povezuje s jednim KL oscilatorom. Korak 1. Unijeti vektor  $a_j$  u matrice frekvencija  $H_j$  i  $G_j$  za  $j$ -ti oscilator. Matrice  $H_j$  i  $G_j$  pripadaju Lie algebri  $su(2)$  antihermiteovih matrica traga nula. Ovdje se koristi izomorfizam između prostora  $su(2)$  i  $R^3$ . Korak 2. Slučajno odabrati početne uslove  $U_1(0), \dots, U_N(0)$  za sistem (4.15) iz uniformne raspodjele na  $S^3$ . Koristeći izomorfizam između  $SU(2)$  i  $S^3$ , ove slučajne tačke na  $S^3$  se transformišu u  $SU(2)$  matrice. Korak 3. Riješiti (4.15) s globalnom jačinom veze  $K$ . Korak 4. Posmatrati proces sinhronizacije KL oscilatora  $U_1(t), \dots, U_N(t) \in SU(2)$  i detektovati (moguću hijerarhijsku) strukturu podataka. Međutim, u

gore navedenom algoritmu postoje dvije nejasnoće: P1: Kako odabrati jačinu veze K? P2: Koji su kriteriji za zaustavljanje? Nemamo pravi odgovor na prvo pitanje. Odgovarajuću jačinu veze K treba odrediti na osnovu nekoliko realizacija algoritma. Očigledno je da ako je K premalo (ispod kritične jačine  $K_c$ ), onda se sinhronizacija uopšte ne odvija i ne može se dobiti nikakva informacija. S druge strane, ako je K preveliko, može se posmatrati brza potpuna sinhronizacija sa sličnim rezul- ltatima. Prema tome, K bi trebalo izabrati na takav način kako bi se osigurao postepeni proces sinhronizacije. Kada je riječ o drugom pitanju, napominjemo da se kriteriji za zaustavlja- nje mogu predstaviti na više načina. Međutim, u većini slučajeva provjera kriterija za zaustavljanje u svakom koraku zahtijeva računanje. Zbog toga predlažemo da se postupa na sljedeći način: riješimo (4.15) i izvučemo info- rmacije o klasterima (uzajamno sinhronizovane grupe KL oscilatora) samo u određenim trenucima, recimo  $t = 1, 5, 10, \dots$ . Na taj način je moguće ide- ntifikovati hijerarhijsku strukturu podataka bez provjere kriterija u svakom koraku. Alternativni prijedlog za kriterij zaustavljanja zasnovan je na zapažanju da je proces sinhronizacije hijerarhijski. Definišimo (Euklidov) prosjek ma- trica  $U_1, \dots, U_N$ :  $\hat{U}(t) = U_j(t)$ .  $1 \leq j \leq N$  Napomenimo da  $\hat{U}$  ne pripada SU (2). Međutim, determinanta matrice  $\hat{U}$  je realna i  $0 \leq \det \hat{U} \leq 1$ , sa slučajem  $\det \hat{U} = 1$  koji odgovara potpunoj si- nhronizaciji. Dakle,  $\det \hat{U}$  je globalni parametar poretka populacije. Kada se pojavi sinhronizacija unutar nekih klastera, parametar poretka  $\det \hat{U}$  brzo ra- ste i nakon određenog vremena ostaje skoro konstantan sve dok se ne nastavi sinhronizacija između susjednih klastera. Zbog toga, jednostavan i računski kratak kriterij je da se algoritam zaustavi (i dobiju informacije o klasterima) kada je  $|\det \hat{U}(t + \delta t) - \det \hat{U}(t)| < \epsilon$  (za razumno odabrano  $\delta t$  i  $\epsilon$ ).

#### 4.3.2 Studije sluča ja U ovom potparagrafu prikazujemo rezultate metode na dva reprezenta- tivna (i mala) skupa podataka. Kao prva studija slučaja analizirali smo poznati skup podataka Iris flower [103], koji se sastoji od 50 uzoraka iz svake od 3 vrste cvijeta irisa (Iris setosa, Iris virginica, Iris versicolor). Svaki cvijet karakteriše 4 atributa: dužina i širina sepalaca i latica. Riješili smo sistem $N = 150$ matrice ODJ (4.15) sa slučajno izabranim početnim uslovima iz SU(2). Četiri atributa svakog cvijeta su unešeni u matrice frekvencija $H_j$ i $G_j$ (prva 3 atributa u $H_j$ , a preostali u $G_j$ ). Dva preostala mjesta u matrici $G_j$ su podešena na nulu. Metod identifikuje dva klastera: prvi odgovara upravo cvjetovima Iris setosa, dok drugi klaster uključuje sve cvjetove Iris virginica i Iris versicolor. Ovaj rezultat je očekivan i prirodan s aspekta nenadgledanog učenja. U stvari, poznato je da se vrste Iris virginica i Iris versicolor ne mogu razlikovati bez upotrebe oznaka kategorija. Ponovljene simulacije na ovom skupu podataka uvijek daju isti odgovor. Za drugu studiju smo prikupili podatke koji opisuju društvo i ekonomiju u 28 različitih zemalja. Svakoj zemlji smo pridružili sljedećih 6 atributa: BDP po stanovniku, stopa nataliteta, očekivani životni vijek pri rođenju, stopa smrtnosti dojenčadi, Gini indeks (raspodjela porodičnih prihoda) i vojni troškovi (kao procenat ukupnog BDP-a). Statistički podaci su izvučeni iz CIA world factbook [25]. Podaci su grubo skalirani i unešeni u matrice frekvencija $H_j$ i $G_j$ (tri atri- buta u svakoj matrici). Sistem od 28 matrice ODJ (sa slučajno izabranim početnim uslovima) je riješen. Algoritam je pronašao 9 klastera: Prvi klaster: Švedska, Njemačka, Kanada, Danska, Holandija. Drugi klaster: Srbija, Bosna i Hercegovina, Crna Gora, Albanija, Buga- rska, Latvija, Indonezija, Malezija, Kina, Tajland, Čile, Urugvaj, Arge- ntina. 69 150 100 50 0 0.0 0.5 1.0 1.5 2.0 (a) 1.0 0.8 0.6 0.4 0.2 0.0 0.0 0.2 0.4 0.6 0.8 1.0 (b) Slika 4.4: Rezultati simulacija za skup podataka Iris flower: ukupan broj klastera se smanjuje od 150 na 2 (a) i globalni parametar poretka $\det \hat{U}(t)$ se povećava (b). Jačina veze je podešena na $K = 10$ . 30 25 20 15 10 5 0 0.0 0.2 0.4 0.6 0.8 1.0 (a) 1.0 0.8 0.6 0.4 0.2 0.0 0.0 0.2 0.4 0.6 0.8 1.0 (b) Slika 4.5: Rezultati simulacija za skup podataka od 28 zemalja: ukupan broj klastera se smanjuje od 28 na 9 (a) i globalni parametar poretka $\det \hat{U}(t)$ se povećava (b). Jačina veze je podešena na $K = 10$ . Treći klaster: Togo, Uganda, Senegal, Kamerun. Odvojeni klasteri (države koje ne spadaju ni u jedan klaster): Saudijska Arabija, Katar, Ujedinjeni Arapski Emirati, Slovenija, Kirgistan, Južnoafrička Republika. Za ovaj skup podataka rezultati se mogu malo razlikovati od jedne si- mulacije do druge. Međutim, osnovni šablon klastera ostaje isti bez



obzira na realizaciju. Na primjer, prvi klaster se uvijek sastoji od istih 5 zemalja. Također, balkanske zemlje su uvijek postavljene u isti klaster. Slike 4.4 i 4.5 ilustruju proces sinhronizacije za dva skupa podataka re- spektivno. Broj klastera se s vremenom smanjuje (slike 4.4(a) i 4.5(a)), dok se globalni parametar poretka povećava (slike 4.4(b) i 4.5(b)).

70 20 10 0 -10 -20 -30 -40 0 1 2 3 4 5 6 Dnevna temperatura 15 10 5 0 0 1 2 3 4 5 6 Dnevna količina padavina Slika 4.6:

Rezultati simulacija za skup podataka Canadian meteorological data: algoritam je pronašao 3 velika klaster (crvene, žute i plave linije) i 4 odvojena klastera (crna, ljubičasta, siva i zelena linija).

#### 4.3.3 Klasteriranje funkcionalnih podataka

Metod koji ovdje predlažemo omogućava razne ekstenzije. Konkretno, lako se može prilagoditi da se bavi multivarijantnim funkcionalnim podacima bez dramatičnog povećanja računске složenosti. Ovo se može uraditi razmatranjem vremenski zavisnih matrica  $H_j(t)$  i  $G_j(t)$  u (4.15). Funkcionalni podaci se onda unose u ove matrice. Ova ideja omogućava identifikaciju klastera u različitim vremenskim intervalima. Da bi se došlo do odlučujućeg zaključka tokom cijelog vremenskog perioda, izračunavamo matrice poparnih udaljenosti između KL oscilatora u nekoliko momenata. Metod je verifikovan na dva skupa podataka koja su prethodno proučavana. Prva studija slučaja je sprovedena na skupu podataka Canadian meteorological data, vidjeti [81]. Ovaj skup podataka se sastoji od 35 različitih lokacija u Kanadi, koje karakterišu dva vremenski promjenljiva atributa (dnevna temperatura i dnevne količine padavina). Pronašli smo sljedeću strukturu podataka (vidjeti sliku 4.6): Prvi klaster:

**St. Johns, Halifax, Sydney, Yarmouth, Charlottvl,** Fredericton, Quebec, Sherbrooke, Montreal, Ottawa, Toronto, London, Arvida, Thunder Bay, Calgary, Bagottville, Regina, Pr. George, Winnipeg, Edmonton, Kamloops, Pr. Albert, The Pas, Whitehorse. Drugi klaster: **Scheffervil, Churchill, Uranium City, Dawson, Yellowknife.** Treći klaster: **Vancouver, Victoria.** Odvojeni klasteri: **Resolute, Inuvik, Iqaluit, Pr. Rupert.**

7

71 10 5 0 -5 0 1 2 3 4 5 6 Stopa rasta BDP-a 15 10 5 0 0 1 2 3 4 5 Kamatna stopa 6 30 20 10 0 -10 -20 0 1 2 3 4 5 Uvoz 6 20 15 10 5 0 -5 -10 0 1 2 3 4 5 6 Industrijska proizvodnja 20 15 10 5 0 0 1 2 3 4 5 6 Stopa nezaposlenosti 40 30 20 10 0 -10 0 1 2 3 4 5 6 Izvoz Slika 4.7: Rezultati simulacija za skup podataka Key economic indicators data: algoritam je pronašao 1 veliki klaster (crne linije) i 4 odvojena klastera (plava, žuta, crvena i ljubičasta linija). Napominjemo da su naši zaključci gotovo identični zaključcima koji su dali Jacques i Preda [43, 44]. Međutim, naša metoda ne zahtjeva da se apriori odredi broj klastera i stoga postavlja četiri vremenske stanice u Sjevernoj Kanadi u zasebne klastere. Drugi skup podataka sadrži 6 ekonomskih indikatora za 16 zemalja tokom perioda od 1990. do 2008. godine. Yamamoto je proučavao ovaj šestovarijantni skup funkcionalnih podataka u radu [106]. Naš metod identifikuje 5 klastera (vidjeti sliku 4.7): Prvi klaster: Australija, Kanada, SAD, Švedska, Francuska, Danska, Finska, Holandija, Velika Britanija, Belgija, Švicarska, Novi Zeland. 72 Odvojeni klasteri: Norveška, Japan, Irska, Španija. Ovi rezultati su veoma slični onima koje je dobio Yamamoto. Međutim, postoji nekoliko razlika: Švicarska se ovdje svrstava u veliki klaster. S druge strane, Norveška i Španija su postavljene u zasebne klastere. Detaljnijim ispitivanjem podataka mogu se otkriti osnovni razlozi za takvu klasifikaciju. U slučaju Norveške, karakteristični indikator je izvozni prihod koji je vrlo visok u periodu od 2004. do 2006. godine. Kada je riječ o Španiji, razlog se može naći u visokoj stopi nezaposlenosti. 73 Glava 5 Distribuirani algoritmi konsenzusa i koordinacije na sferama

#### 5.1 Uvod

Široka oblast kooperativnog i distribuiranog upravljanja obuhvata podatke konsenzusa, balansiranja, održavanja formacije i koordiniranog kretanja u višeagentnim sistemima. Posebna poddisciplina, nazvana teorija geometrijskog konsenzusa (ili, općenito, teorija geometrijske koordinacije) se

bavi ovim zadacima na neeuclidskim mnogostrukostima [90, 92]. Algoritmi koordinacije su formulirani na homogenim prostorima [89, 90]. Međutim, koordinacija agenata u velikoj mjeri zavisi od geometrijskih i algebarskih osobina osnovne mnogostrukosti, te se algoritmi na različitim homogenim prostorima izvode drugačije. Stoga, iako su nedavni teorijski napretci razvili prilično univerzalni pristup zadacima koordinacije na proizvoljnim homogenim prostorima, ima nekoliko univerzalnih rezultata u vezi s konvergencijom prema željenim ravnotežnim konfiguracijama. Neki zadaci teorije geometrijske koordinacije su formulirani kao minimizacija odgovarajućih funkcija cilja na specifičnim homogenim prostorima. Metode gradijentnog spuska za ove zadatke minimiziranja omogućavaju distribuirani protokoli koordinacije. Jedan primjer ove vrste je zadatak konsenzusa na kružnici  $S^1$  nad težinskim grafom  $G$ . Gradijentni protok potencijalne funkcije daje sistem ODJ na  $S^1$ . Ovaj sistem ODJ je u suštini poznati model Kuramoto identičnih oscilatora koji su povezani kroz graf  $G$ . Ovo zapažanje ukazuje na intrigantnu vezu između konsenzusa na homogenim prostorima i univerzalnog prirodnog fenomena sinhronizacije povezanih 74 oscilatora [78]. Algoritmi koordinacije na  $S^1$  imaju direktne primjene u kooperativnom upravljanju kolektivnih kretanja u ravni [93]. U ovoj glavi razmatramo koordinaciju roja na sferi  $S^3$ . Postoje dva dobra razloga za fokusiranje na ovu specifičnu mnogostrukost. Prvo, geometrija sfera  $S^n$  (izuzev kružnice  $S^1$ ) daje prednost konsenzusu. Zaista, algoritmi konsenzusa na  $S^n$  se izvode mnogo bolje od njihovih analoga na specijalnim ortogonalnim grupama  $SO(n)$  [62]. Drugo,  $S^3$  je, zajedno sa  $S^1$ , jedina sfera s osobinom grupe. To čini  $S^3$  veoma pogodnom postavkom za različite algoritme koordinacije, što ćemo pokazati u narednom paragrafu. Inspiracija za rezultate u ovoj glavi donekle proističe iz činjenice da su gradijentni protoci za zadatke konsenzusa na višedimenzionim homogenim prostorima poznati u fizici kao neabelovi modeli Kuramoto, vidjeti [57]. Ovo zapažanje proširuje relaciju između konsenzusa i sinhronizacije: dok konsenzus na  $S^1$  odgovara sinhronizaciji u klasičnom (Abelovom) modelu Kuramoto, konsenzus na  $S^3$  odgovara kvantnoj sinhronizaciji u neabelovom modelu Kuramoto [57, 58]. Većina radova o teoriji geometrijske koordinacije se bavi rojem agenata koji komuniciraju kroz konstantni graf interakcija. U drugom paragrafu ove glave proučavamo roj s adaptivnim (zavisnim o stanju) interakcijama koje zadovoljavaju određene realizacije Hebbovog i antihebbovog pravila učenja. Model Kuramoto sa sinapsama koje uzimaju u obzir određene varijacije ovih pravila učenja je proučavan u nekoliko radova, vidjeti [37, 41, 96]. Po našem najboljem saznanju, neabelovi modeli Kuramoto s Hebbovim pravilom učenja do sada nisu razmatrani. Napominjemo, međutim, da su rojevi na  $S^n$  sa sinapsama zavisnim o stanju proučavani u [55, 72]. Također, rad [56] se bavi rojenjem na sferi s različitim kooperativnim pravilima u vremenski diskretnim modelima. U paragrafu 5.3 pokazujemo da rojevi na  $S^3$  s nekim prirodnim i jednostavnim pravilima učenja za sinapse pokazuju različite oblike ponašanja i stabilne konfiguracije. 5.2 Konsenzus i balansiranje na 3-sferi Zadaci konsenzusa imaju važnu ulogu u širokom polju distribuiranog i kooperativnog upravljanja. Različiti zadaci ove vrste na euklidskim prostorima su proučavani pod različitim ograničenjima i pretpostavkama, vidjeti, na primjer, [67, 73] i reference u njima. Međutim, u mnogim inženjerskim primjenama, kao što su kooperativno upravljanje krutog tijela [19, 86], mobilne senzorske mreže [76] ili prosjek rotacija [39], osnovni prostor je neeuclidov. Teorija geometrijskog konsenzusa [90, 92] ima za cilj konstruisanje algoritama na određenim Riemannovim mnogostrukostima i elaboriranje jedinstvenog pristupa konsenzusu u euklidskim i neeuclidskim prostorima. Postoje bitne razlike između ove dvije postavke, s obzirom da osobine konvergencije algoritama konsenzusa mnogo zavise od geometrije osnovnog prostora. Da bi dobili osjećaj o ovome, poučno je započeti sa zadatkom na kružnici  $S^1$ . 5.2.1 Konsenzus na  $S^1$  Razmotrimo roj  $N$  agenata čija su stanja opisana tačkama  $e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_N}$  na  $S^1$ . Pretpostavimo da agenti međusobno komuniciraju preko neusmjerenog komunikacijskog grafa

$G = (V, E)$ , gdje je  $V = \{1, \dots, N\}$  skup čvorova i  $E \subseteq \{(j, k) : j, k \in V, j$

17

$k \neq j\}$  je skup grana. Kažemo da su agenti  $j$  i  $k$  susjedi ako postoji grana između njih, tj. ako  $(j, k) \in E$ . Na osnovu informacija dobijenih od svojih susjeda, svaki agent neprekidno prilagodava svoje stanje. Prateći analogiju s linearnim algoritmima konsenzusa, prirodno je predložiti sljedeće kontinuirano ažuriranje stanja agenata [88, 90]:  $\dot{\theta}^k = \alpha \sum_{j \in N} a_{jk} (\sin(\theta_j - \theta_k))$ ,  $\alpha > 0$ ,  $k = 1, \dots, N$ . (5.1) Ovdje,  $a_{jk} = 1$  ako  $(j, k) \in E$  i  $a_{jk} = 0$  ako  $(j, k) \notin E$ . Sistem (5.1) definiše potencijalnu dinamiku. To je gradijentni sistem za potencijalnu funkciju na  $N$ -torusu  $T^N = S^1 \times \dots \times S^1$ :  $V(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N a_{jk} |\sin(\theta_j - \theta_k)|^2$ . (5.2) Drugim riječima, (5.1) se dobija metodom gradijentnog spuska za zadatak minimizacije (5.2):  $\dot{\theta}^k = -\alpha \partial V / \partial \theta^k$ ,  $k = 1, \dots, N$ . Dakle, trajektorije konvergiraju prema kritičnim tačkama od  $V(\theta)$  i svi strogi minimumi funkcije  $V(\theta)$  su stabilne ravnoteže sistema (5.1). Napomena 5.1. Sistem (5.1) je poznati model Kuramoto povezanih oscilatora. Napominjemo da, za razliku od originalnog modela Kuramoto predstavljenog u radu [52], oscilatori u (5.1) imaju identične (nulte) frekvencije i povezani su preko grafa  $G$ . 76 Gornja napomena pokazuje da je pitanje konvergencije distribuiranih algoritama konsenzusa na nekim Riemannovim mnogostrukostima povezano s univerzalnim fenomenom sinhronizacije povezanih oscilatora, vidjeti [78]. Definicija 5.1. Konfiguracija  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_N)$  se zove sinhronizacija agenata. Očigledno je da sinhronizacija odgovara globalnom minimumu potencijalne funkcije  $V(\theta)$ . Zbog toga se za zadatak konsenzusa može reći da je optimizacija funkcije  $V(\theta)$ . Međutim, ne postoji garancija da će (5.1) konvergirati prema sinhronizaciji, jer  $V(\theta)$  može imati kritične tačke različite od globalnog minimuma. Egzistencija lokalnih minimuma i drugih kritičnih tačaka funkcije cilja u velikoj mjeri zavisi od komunikacijskog grafa  $G$ . Za graf  $G$  se kaže da je  $S^1$ -sinhronizirajući, ako (5.2) ne prihvata lokalne minimume različite od sinhronizacije. To je otvoreni problem za karakterizaciju (bar približnu) svih  $S^1$ -sinhronizirajućih grafova. Na primjer, simulacije pokazuju da je prsten graf s 4 čvora  $S^1$ -sinhronizirajući, dok prsten grafovi koji sadrže 5 i 6 čvorova nisu ([90]). Jedan od rijetkih univerzalnih rezultata po ovom pitanju navode da su kompletni grafovi (komunikacija svaki sa svakim) i neusmjerena stabla  $S^1$ -sinhronizirajući, vidjeti [88, 90]. 5.2.2 Konsenzus na  $S^3$  i  $SO(3)$  preko neusmjerenih grafova Kao što je pomenuto u uvodu, matematičku formalizaciju nekih važnih inženjerskih zadataka daju zadaci konsenzusa na određenim višedimenzionim Riemannovim mnogostrukostima. Da bi se razvila značajna teorija geometrijskog konsenzusa, neophodno je nametnuti neke uslove na klasi Riemannovih mnogostrukosti na kojima su navedeni zadaci. Jedno prirodno ograničenje je raditi pod pretpostavkom da je osnovna mnogostrukost homogeni prostor. Ovdje ćemo se fokusirati na konsenzus (i antikonsenzus) na jednoj specifičnoj mnogostrukosti. To je Lie grupa  $SU(2)$  s grupnom mnogostrukosti  $S^3$ . U cilju predstavljanja koordinata na sferi  $S^3$  radićemo s algebrom jediničnih kvaterniona. Razmotrimo sljedeći sistem kvaternionskih ODJ na  $S^3$ :  $\dot{q}^j = q^j f^j - f^j q^j$ ,  $j = 1, \dots, N$ . (5.3) Ovdje,  $q^j(t)$  je jedinični kvaternion, koji opisuje poziciju  $j$ -tog agenta na  $S^3$  i  $f^j = f^j(q^1, \dots, q^N)$  su kvaternionске funkcije nazvane funkcijama veze ili komunikacijski protokoli zavisno od konteksta. Pojam  $\bar{a}$  označava kvaternionsku konjugaciju kvaterniona  $a$  (konjugacija jediničnog kvaterniona se poklapa s inverznom:  $\bar{\bar{a}} = a$ ). 77 Napomenimo da jednačine (5.3) čuvaju  $S^3$ . Ovo se lako potvrđuje tako što se pokaže da  $q^j(0) \in S^3$  za sve  $j = 1, \dots, N$  implicira  $q^j(t) \in S^3$  za svako  $t > 0$ . Mogu se proučavati različiti oblici funkcija  $f^j$  u (5.3), u zavisnosti od specifičnih ciljeva. Za zadatke konsenzusa, ima smisla razmatrati funkcije sljedećeg oblika:  $\alpha \sum_{k=1}^N a_{jk} q^k$ , gdje je  $\alpha > 0$ . (5.4) Nadvučeno označava kvaternionsku konjugaciju kao i ranije. Uključivanjem (5.4) u (5.3) se dobija sljedeći sistem kvaternionskih ODJ  $\dot{q}^j = \alpha \sum_{k=1}^N a_{jk} (q^k q^j - q^j q^k)$ . (5.5) Napomena 5.2. Sistem (5.5) (zapisan s realnim promjenljivim) se pojavio u nekoliko

radova s različitim interpretacijama, na primjer kao roj na sferi u [72] i formiranju stavova na sferi u [18]. Sljedeći korak je da se pokaže da (5.5) prikazuje potencijalnu dinamiku. Potencijalna funkcija se može napisati kako slijedi:  $V_q(q_1, \dots, q_N) = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N (2 - \cos \phi_{jk})$ , (5.6) gdje je  $\phi_{jk}$  ugao između dva vektora na  $S^3$  koji odgovaraju kvaternionima  $q_j$  i  $q_k$ . Stoga, situacija je analogna slučaju na  $S^1$  koja je ukratko objašnjena u prethodnom potparagrafu. Zadatak konsenzusa na  $S^3$  se može navesti kao minimizacija funkcije  $V_q$  i odgovarajuća metoda gradijentnog spuska (5.5) obezbjeđuje distribuirani algoritam konsenzusa na  $S^3$ . Uz (5.6) razmotrimo i zadatak minimizacije funkcije  $V_Q(Q_1, \dots, Q_N)$  definisane na  $(SO(3))^N$  (vidjeti, na primjer, [89, 90]):  $V_Q(Q_1, \dots, Q_N) = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \text{tr}(Q_j^T Q_k)$ . (5.7) Sistem gradijentnog spuska za (5.7) glasi:  $\dot{Q}_j - Q_j^{-1} \dot{Q}_j = \alpha \sum_{k=1}^N \text{tr}(Q_j^{-1} Q_k - Q_j^{-1} Q_j)$ . (5.8) Napomena 5.3. U potparagrafu 5.2.1 je pomenuto da se gradijentni sistem (5.1) za zadatak konsenzusa na  $S^1$  može tumačiti kao model Kuramoto povezanih oscilatora s identičnim nultim frekvencijama. Postoji analogija u višim dimenzijama. Sistemi gradijentnog protoka oblika (5.5) i (5.8) su predstavljeni u [57] kao tzv. neabelovi modeli Kuramoto. Ovo zapažanje ukazuje na paralelni razvoj u teoriji geometrijskog konsenzusa i u proučavanju fenomena sinhronizacije. Za konsenzus na  $S^1$  je povezana klasična sinhronizacija, dok je konsenzus na  $S^3$  povezan s fenomenom nazvanim kvantna sinhronizacija, vidjeti [58]. Definicija 5.2. Konfiguracija  $s = q_1 = \dots = q_N$  se zove sinhronizacija na  $S^3$ . Očigledno je da su konfiguracije sinhronizacije globalni minimumi funkcija (5.6) i (5.7). Napomena 5.4. Postoji izvjesna dvosmislenost u korištenju termina konsenzus i sinhronizacija u relevantnoj literaturi. U radu [62] se ova dva pojma smatraju sinonimima. S druge strane, u radovima [88, 89, 90] je pojam konsenzusa općenitiji. Roj može primiti mnoge konfiguracije konsenzusa, zavisno od grafa  $G$ , a sinhronizacija je poseban slučaj konsenzusa. Pored toga, u nekim radovima, termini poravnanje i sastajanje se također koriste s istim značenjem. Izlaganje je do sada predstavljalo analogne zadatke konsenzusa i algoritama na sferama  $S^1$  i  $S^3$  i matricnoj grupi  $SO(3)$ . Međutim, ispostavlja se da su osobine konvergencije algoritama (5.1), (5.5) i (5.8) veoma različite zbog geometrijskih osobina osnovnih mnogostrukosti. Da bismo vidjeli ovo, počeli smo s nedavnim teorijskim rezultatom, dokazanim u [62]: Teorema 5.1. Pretpostavimo da je komunikacijski graf  $G$  neusmjeren i povezan. Tada je skup konfiguracija sinhronizacije skoro globalno stabilan za (5.5). Drugim riječima, skup svih početnih uslova za koje (5.5) ne konvergira prema sinhronizaciji ima nultu Lebesgueovu mjeru na  $(S^3)^N$ . Napomena 5.5. Teorema 5.1 pruža teorijsku osnovu za algoritme konsenzusa na  $S^3$ , a to je da je konvergencija prema sinhronizaciji skoro zagarantovana. Geometrija 3-sfere je povoljna za sinhronizaciju. U stvari, teorem 5.1 važi za konsenzus na bilo kojoj sferi  $S_n$  za  $n \geq 2$ . Istovremeno, teorem 5.1 ne važi za  $S^1$ . Zaista, kako je objašnjeno u potparagrafu 5.2.1, postoje mnogi grafovi koji nisu  $S^1$ -sinhronizirajući. Isto važi i za  $SO(3)$ , simulacije pokazuju da algoritam (5.8) ne konvergira obavezno prema sinhronizaciji. Potencijalna funkcija (5.7) može imati lokalne minimume. Struktura skupa lokalnih minimuma od  $V_Q$  mnogo zavise od komunikacijskog grafa. Rezultati simulacija. Da bismo ilustrovali gore navedenu tačku, izvršili smo simulacije za konkretan slučaj kada su  $N = 5$  agenata povezani u prsten (tj. komunikacijski graf  $G$  je prsten s 5 čvorova). Početna stanja agenata su slučajno izabrana iz uniformne raspodjele na  $S^3$ . Početna stanja na  $SO(3)$  su dobijena preslikavanjem tačke iz  $S^3$  u  $SO(3)$  matricu. Algoritam (5.5) na  $S^3$  je dostigao sinhronizaciju u 1000 od 1000 simulacija. Algoritam (5.8) na  $SO(3)$  je dostigao sinhronizaciju u 609 od 1000 simulacija. Napomenimo da su isti eksperiment izložili Markdahl i ostali u radovima [61, 62], a naši rezultati su u skladu s njihovim. Vizualizacija. Naravno, problematično je vizualizirati evoluciju tačaka na sferi u 4-dimenzionom prostoru. Mi ćemo ilustrirati evoluciju roja na  $S^3$  prikazujući rotirajuća tijela u 3D. Matematički, koristimo dvostruko pokrivajuće preslikavanje iz  $S^3$  u  $SO(3)$  i predstavljamo 3D rotacije pomoću jediničnih kvaterniona. Dobro je poznato da takvo predstavljanje uzrokuje neke specifične efekte, zbog činjenice da dva antipodalna kvaterniona  $q$  i  $-q$  odgovaraju istoj matrici u  $SO(3)$ . Osobine konvergencije za (5.5) i (5.8)

su prikazana u dva kratka videa. Broj agenata je  $N = 5$ , a komunikacijski graf je prsten s 5 čvorova. Slučajno smo izabrali početne uslove iz uniformne raspodjele na  $S^3$  i iste početne uslove na  $SO(3)$  (preslikavanjem jediničnih kvaterniona u odgovarajuće  $SO(3)$  matrice). Može se vidjeti da je sinhronizacija postignuta na  $S^3$  (vidjeti video u dodatnim materijalima rada [27]), dok na  $SO(3)$  algoritam završava u nekom lokalnom minimumu potencijalne funkcije (vidjeti video u dodatnim materijalima rada [27]). Prema rezultatima simulacija koji su objašnjeni iznad, vjerovatnoća takvog ishoda je približno jednaka 0.4.

### 5.2.3 Konsenzus na $S^3$ preko kompletnog grafa

Poznato je da u slučaju kompletnog komunikacijskog grafa algoritmi (5.1), (5.5) i (5.8) uvijek konvergiraju prema sinhronizaciji na  $S^1$ ,  $S^3$  i  $SO(3)$  respektivno, vidjeti [89, 90]. Drugim riječima, ako je  $G$  kompletan graf tada su konfiguracije sinhronizacije jedini minimumi funkcija  $V_\theta$ ,  $V_q$  i  $V_Q$ . U ovom potparagrafu razmatramo zadatak konsenzusa na  $S^3$  s druge tačke gledišta. Kroz ovaj i sljedeći potparagraf pretpostavljamo da je komunikacijski graf  $G$  kompletan. Napomenimo da je u nekim inženjerskim primjenama takva topologija preskupa ili čak nije izvodljiva. U kontekstu povezanih oscilatora, ova situacija se naziva globalna (svaki sa svakim) veza ili veza srednjeg polja. U ovom slučaju sistem (5.3) je napisan kao:  $\dot{q}_j = \omega_j f(q_j) - f^{-1}$ ,  $j = 1, \dots, N$ , (5.9) gdje je  $f = f(q_1, \dots, q_N)$  funkcija globalne veze. Za konsenzus preko kompletnog grafa, funkcija veze je u obliku:  $\alpha N f = -2N \sum_{k=1}^N q_k^{-1}$ , gdje je  $\alpha > 0$ . (5.10) Zamjenjujući (5.10) u (5.9) se dobija algoritam konsenzusa na  $S^3$ :  $\alpha N \dot{q}_j = N(q_j q_k - q_k^{-1})$ ,  $j = 1, \dots, N$ . (5.11) Štaviše, za slučaj kompletnog grafa, potencijalna funkcija  $V_q$ , koja je zadana s (5.6) ima naročito jednostavan oblik:  $V_q = 1 - r^2$ , (5.12) gdje je  $r = \|N^{-1} \sum_{j=1}^N q_j\|$ . Da bi se ovo razjasnilo, razmotrimo roj agenata čija  $N$  stanja zadana s  $q_1, \dots, q_N \in S^3$  i definišimo  $\langle q \rangle = N^{-1} \sum_{j=1}^N q_j$ . Očigledno  $\sum_{j=1}^N q_j$  je da je  $\langle q \rangle$  tačka u kugli  $B^4$  (unutrašnjost od  $S^3$ ) koja je centroid (centar mase) skupa tačaka  $q_1, \dots, q_N$ . Dalje,  $r = \|\langle q \rangle\|$  je norma ove tačke (tj. 4D vektora). U kontekstu povezanih oscilatora, realni broj  $r \in [0, 1]$  se naziva globalni parametar poretka roja agenata (tj. populacije oscilatora). Situacija kada je  $r = 1$  (potpuno koherentno stanje) odgovara sinhronizaciji. Obrnuta situacija, kada je  $r = 0$ , naziva se potpuno nekoherentno stanje u statističkoj fizici. U teoriji sistema, ova situacija se naziva balansirana konfiguracija.

### 81 Pored globalnog parametra poretka, uvodimo i pojam ugaonih parametara poretka.

Za tu svrhu koristimo Hopfove koordinate na  $S^3$ . U tom cilju kvaternione  $q_k$  predstavljamo u Cayley-Dicksonovom obliku:  $q_k = z_k + v_k j$ , gdje su  $z_k$  i  $v_k$  kompleksni brojevi. Nadalje, budući da su  $q_k$  jedinični kvaternioni,  $z_k$  i  $v_k$  se mogu napisati na sljedeći način:  $z_k = e^{i\phi_k} \sin\theta_k$ ,  $v_k = e^{i\psi_k} \cos\theta_k$ , gdje su  $\phi, \psi \in (0, 2\pi)$ ,  $\theta \in (0, \pi/2)$ . Sada, definirajmo sljedeće kompleksne brojeve:  $N^{-1} \sum_{k=1}^N r\phi(t) e^{i\mu(t)} = N^{-1} \sum_{k=1}^N e^{i\phi_k(t)}$  i  $r\psi(t) e^{i\mu(t)} = N^{-1} \sum_{k=1}^N e^{i\psi_k(t)}$ . Očigledno su  $r\phi(t)$  i  $r\psi(t)$  realni brojevi u intervalu  $[0, 1]$ . Brojeve  $r\phi$  i  $r\psi$  ćemo nazvati ugaonim parametrima poretka. Da rezimiramo, u slučaju kompletnog grafa, zadatak minimizacije potencijalne funkcije se čini da je jednostavno maksimizacija parametra poretka (stepena koherentnosti) roja. Sistem gradijentnog spuska za (5.12) je (5.11). Propozicija 5.1. [88, 89, 90] Funkcija (5.12) nema lokalne minimume različite od sinhronizacije. Konfiguracije sinhronizacije su globalni minimumi od (5.12) i jedina asimptotski stabilna ravnoteža za (5.11). Stoga, zadatak o kojem diskutujemo u ovom potparagrafu se u potpunosti shvata sa stanovišta teorije optimizacije. Međutim, ovdje imamo drugačiju tačku gledišta kako bismo ukazali na neke odnose s fizikom i hiperboličkom geometrijom i izdvojili neke specifične nove rezultate. Kao što je već pomenuto, sistem (5.9) je zapravo neabelov model Kuramoto na  $S^3$  s globalnom (svaki sa svakim) vezom. U prethodnoj glavi smo proučavali neke simetrije ovog sistema. Da bismo to objasnili, počinjemo s nekim oznakama. Označimo s  $H$  algebru kvaterniona. Skup linearnih frakcionih Möbiusovih transformacija koje djeluju na proširenom kvaternionskom prostoru  $HU\{\infty\}$  je grupa  $GL(2, H)$ . Razmotrimo podgrupu  $GH$  svih Möbiusovih transformacija koje čuvaju  $S^3$ . Teorema 5.2. Neka roj evoluirá s (5.9) od njihovih početnih pozicija  $q_1(0), \dots, q_N(0)$ . Tada u  $GH$  postoji jednoparameterska familija Möbiusovih transformacija, takva da  $q_j(t) = g_t(q_j(0))$  za svako  $t > 0$  i  $j = 1, \dots, N$ . Teorema 5.2 tvrdi da se u svakom momentu  $t$  pozicije agenata na  $S^3$  dobijaju iz njihovih početnih pozicija nekom Möbiusovom transformacijom koja

pripada GH. Napominjemo da je analogna činjenica za roj na S1 ranije utvrđena u [63]. 82 Koristeći teoremu 5.2 i opšte rezultate teorije grupa možemo tvrditi da raspodjela agenata na S3 pripada orbitama grupe GH. To daje sljedeće: Korolar 5.1. Pretpostavimo da roj evoluiru s (5.9). Tada se raspodjela agenata razvija na određenoj 10-dimenzionoj invarijantnoj podmnogostrukosti koja leži u beskonačno-dimenzionoj mnogostrukosti svih raspodjela na S3. Dokaz. Za dokaz je dovoljno provjeriti da li je dimenzija 10 orbita grupe GH. Da bi se ovo vidjelo, uočimo da opšta Möbiusova transformacija koja čuva S3 može biti napisana u sljedećem obliku:

$$w(q) = p(1 - q\bar{a})^{-1}(q - a)r, \quad \text{za } q$$

3

$\in S_3$ , gdje su  $p$  i  $r$  jedinični kvaternioni i  $a \in H$ ,  $|a| < 1$ . Dva jedinična kvaterniona  $p$  i  $r$  generišu rotacije na S3 i  $a$  odgovara dejstvu centra sfere. Rotacije (ili jedinični kvaternioni) daju  $2 \times 3 = 6$  nezavisnih realnih parametara, dok je  $a$  tačka u B4 (4 realna parametra). Na kraju, korolar slijedi iz opštih rezultata teorije grupa. \* Postoji jedinstven način da se proširi Möbiusova transformacija  $gt$  sa S3 na cijelu jediničnu kuglu B4. Razmotrimo ovu ekstenziju i označimo s  $P(t)$  sliku centra sfere S3 pod dejstvom  $gt$ , tj.  $P(t) = gt(0)$ . Propozicija 5.2. Neka roj evoluiru s (5.9) i neka je  $gt$  familija Möbiusovih transformacija koja je definisana u teoremu 5.2. Tada tačka  $P(t) = gt(0)$  evoluiru u B4 sljedećom kvaternionskom ODE-om:  $dP = P f P - f^{-1}$ . (5.13) dt U preostalom dijelu ovog potparagrafa i u cijelom sljedećem potparagrafu će nam trebati pojam konformni baricentar [29] vjerovatnosne mjere  $\mu$  na sferi. Pretpostavimo da vjerovatnosna mjera  $\mu$  ne sadrži atom težine  $\geq 12$ . Slijedeći Douadyja i Earlea [29], definišimo funkciju  $h_\mu$  na B4:

$$(a) = \int_{S^3} |a - u|^2 \log \frac{1 - |a|^2}{|1 - |a|^2|} d\mu(u), \quad a \in B_4$$

3

i označimo s  $\xi_\mu$  gradijent od  $h_\mu$  u Poincareovoj (hiperboličkoj) geometriji u B4. Tada je  $\xi_\mu$  vektorsko polje u B4, te su Douady i Earle dokazali da postoji jedinstvena tačka u B4 gdje polje  $\xi_\mu$  nestane. Ta tačka se naziva konformnim baricentrom  $B(\mu)$  od  $\mu$ . 83 Napomena 5.6. Neka je  $\mu$  vjerovatnosna mjera na S3 i  $w$  je Möbiusova transformacija koja čuva B4. Razmotrimo mjeru  $\nu = w(\mu)$  koja se dobiva kao Möbiusova transformacija od  $\mu$ . Vrijedi da  $w(B(\mu)) = B(\nu)$ , gdje su  $B(\mu)$  i  $B(\nu)$  konformni baricentri ove dvije mjere. Ova napomena naglašava jednu posebnu osobinu konformnog baricentra. Ta osobina je ako je mjera transformisana Möbiusovom transformacijom, onda je konformni baricentar transformisan istom Möbiusovom transformacijom. Centroid nema ovu jedinstvenu osobinu. Ako centroide (srednje vrijednosti) označimo s  $C(\mu)$  i  $C(\nu)$  mjera  $\mu$  i  $\nu$ , onda je, općenito,  $w(C(\mu)) \neq C(\nu)$ . Lema 5.1. Razmotrimo roj (5.9) i pretpostavimo da je broj agenata velik,  $N \rightarrow \infty$ . Pretpostavimo da je početna raspodjela agenata uniformna na S3. Tada se konformni baricentar roja poklapa s centroidom u svakom momentu  $t$ . Štaviše, raspodjela agenata  $\rho$  u svakom momentu  $t$  je zadana sljedećom funkcijom gustoće na S3:  $\rho(y)$

$$P(t) = \frac{1 - \|P(t)\|^2}{2\pi^2 (\|y - P(t)\|^2)}, \quad y \in S_3, \quad P(t)$$

13

$\in B_4$ . (5.14) Dokaz. Raspodjela (5.14) se zove Poissonovo jezgro na S3. Poznato je (vidjeti [51]) da Poissonova jezgra na S3 (kao i na S1) nastaju kao Möbiusove transformacije uniformne mjere. Centroid Poissonovog jezgra (harmonijska







znakova (privlačne, odbojne ili vremenski zavisne). Ako su wjk strogo nenegativne, sistem (5.18) obezbjeđuje distribuirani algoritam konsenzusa. Sistem (5.18) se može ekvivalentno zapisati u realnim koordinatama s jediničnim vektorima  $x_1(t), \dots, x_N(t) \in \mathbb{R}^4$ :  $N \dot{x}_j = \alpha \sum_{k=1}^N w_{jk}(x_k - \langle x_j, x_k \rangle x_j)$ ,  $j = 1, \dots, N$ . (5.19)  $\sum_{k=1}^N$  Postoji nekoliko načina za konstruisanje interakcija zavisnih o stanju u skladu s Hebbovim pravilom učenja. Kako bismo dobili neku ravnotežu različitu od konsenzusa, uvodimo pravilo učenja koje rezultira s privlačnim i odbojnim interakcijama wjk. Razmotrimo roj koji je određen sistemom (5.18) s koeficijentima wjk koji uzimaju u obzir sljedeći sistem ODJ:  $\dot{w}_{jk} = \epsilon(q^-_j q_k + q^-_k q_j - \mu w_{jk})$ ,  $\mu > 0$ ,  $j = 1, N$ ,  $k = 1, N$  (5.20) s početnim uslovima koji zadovoljavaju  $w_{jk}(0) = w_{kj}(0)$  za sve  $1 \leq j, k \leq N$ . Ovo osigurava da su interakcije wjk(t) simetrične za svaki naredni moment  $t > 0$ . Parametar  $\epsilon$  u (5.20) se tumači kao stopa učenja. Sistem (5.20) definiše neku vrstu Hebbovog učenja. Kako bi to razumjeli,

primjetimo da je kvaternionski izraz  $2(q^-_j q_k + q^-_k q_j)$  realan i jednak  $\cos \psi_{jk}(t) = \langle x_j, x_k \rangle$

(t), gdje je  $\psi_{jk}(t)$  ugao između jediničnih vektora  $x_j(t)$  i  $x_k(t)$ . Stoga je ravnotežna interakcija wjk između agenata j i k

maksimalno privlačna 89 1.0 0.5 0.0 -0.5 -1.0 0 5 10 15 20 a) 1.0 0.8 0.6 0.4 0.2 0.0 0 5 10 15 20 b) Slika 5.1: Model s

Hebbovim učenjem (5.18), (5.20) s  $N = 10$  agenata. Vrijednost parametra:  $\epsilon = 0.2$ . Nulte početne vrijednosti za sinapse

$w_{jk}(0) = 0$  i slučajne početne vrijednosti za  $q_j(0)$  smo birali u skladu s napomenom 5.9. (a) Skalarni proizvodi  $\langle x_j, x_k \rangle$  za

neke j, k i (b) parametri poretka: globalni parametar poretka (crna linija), parametar poretka za ugao  $\phi$  (crvena linija) i

parametar poretka za ugao  $\psi$  (žuta linija). kada su agenti j i k poravnati ( $q_j = q_k$ ). Obratno, interakcija je maksimalno

odbojna ako su agenti pozicionirani u antipodalnim tačkama,  $q_j = -q_k$ . Nije iznenađujuće što sistem (5.18), (5.20)

završava u bipolarnoj (anti- podalnoj) konfiguraciji na  $S^3$ . Na slici 5.1 prikazujemo evoluciju poparnih kosinusa  $\cos \psi_{jk}(t) = \langle x_j, x_k \rangle(t)$  za neke parove  $x_j, x_k$ . Napomena 5.9. U svim simulacijama početni uslovi za stanja agenata  $q_1(0), \dots, q_N(0)$  su

slučajno izabrani iz uniformne raspodjele na  $S^3$ . Interakcije su u početku podešene na nulu,  $w_{jk}(0) = 0$ , za svako j, k, što

znači da mreža ne postoji za  $t = 0$ . Definicija 5.5. Konfiguracija agenata, takva da je  $q_1 = \dots = q_m = -q_{m+1} = \dots = -q_N$ ,

gdje je  $0 \leq m \leq N$  se naziva bipolarna (ili antipodalna). Napomenimo da skup bipolarnih konfiguracija uključuje sve

konfiguracije konsenzusa. Drugim riječima, konsenzus je bipolarna konfiguracija za  $m = N$ . Propozicija 5.4. Skup

bipolarnih konfiguracija je asimptotski stabilan za model (5.18), (5.20). Dokaz. Označimo s  $X^\wedge = (\pm x^\wedge_1, \dots, \pm x^\wedge_N)$

konfiguraciju bipolarne ravnoteže s odgovarajućim interakcijama  $\hat{W} = (\pm 1, \dots, \pm 1)$ . Dimenzije vektora  $X^\wedge$  i  $\hat{W}$  su  $4N$  i  $N^2$

-  $N$  respektivno. 90 Zapišimo linearizaciju od (5.19), (5.20) oko tačke  $(X^\wedge, \hat{W})$ :  $\dot{X} = LX + TW + D(X)X$ ,  $\dot{W} = PX + MW +$

$G(X)X$ . Tada je matrica linearne aproksimacije od (5.19), (5.20) u okolini tačke  $(X^\wedge, \hat{W})$ :  $J = L T \cdot (P M)$  Ovdje,  $T =$

$\partial \partial w_{jk}(X^\wedge, \hat{W})$ ,  $M = \partial \partial w_{jk}(X^\wedge, \hat{W})$ , gdje su f i g desne strane od (5.18) i (5.20):  $N \times N$   $f_j(X, W) = \alpha \sum_{k=1}^N w_{jk}(q_j q_k - q^-_j q^-_k) = \alpha \sum_{k=1}^N w_{jk}(x_k - \langle x_j, x_k \rangle x_j)$   $\sum_{k=1}^N$  i  $g_j(X, W) = \epsilon(q^-_j q_k + q^-_k q_j - \mu w_{jk}) = \epsilon(2\langle x_j, x_k \rangle - \mu w_{jk})$ . Jednostavno deriviranje

daje:  $\partial w_{jk} = \alpha (x_j - \langle x_k, x_j \rangle x_k)$ .  $\partial f_j$  Ovaj izraz je jednak nuli kod bipolarne konfiguracije, kada je  $x_j = \pm x_k$ , te je:  $\partial f_j(X^\wedge, X^\wedge) = 0$ , za sve j i k.  $\partial w_{jk}$  Također, deriviranjem g:  $\partial g_{jk} = -\epsilon \mu$ , if  $j = s, k = t$ ;  $\partial w_{st} = \{ 0, \text{ inače. Otuda, matrica T se sastoji od nula i}$

$M$  je  $(N^2 - N) \times (N^2 - N)$  dijagonalna matrica s dijagonalnim elementima  $-\mu$ . Karakteristični polinom matrice J glasi:  $\det(L - tI) \det(M - tI) = \det(L - tI)(-\mu - t)^{N^2 - N}$ . Iz toga slijedi da je antipodalna ravnoteža  $(X^\wedge, \hat{W})$  za (5.19), (5.20) sta-

bilna kada je  $X^\wedge$  stabilna ravnoteža za (5.19) s odgovarajućim interakcijama  $w_{jk} = \pm 1$  za svako j i k. Da bismo završili dokaz,

pozivamo se na rezultate [18, 72] koji kažu da je antipodalna konfiguracija asimptotski stabilna ravnoteža za (5.19) ako

su interakcije wjk simetrične. \* 91 1.0 0.5 0.0 -0.5 -1.0 0 50 100 150 200 a) 1.0 0.8 0.6 0.4 0.2 0.0 0 50 100 150 200 b)

Slika 5.2: Model s antihebbovim učenjem (5.18), (5.21) s  $N = 4$  agenata. Vrijednost parametara:  $\epsilon = 0.2$ ,  $\mu = 2$ . Početne

vrijednosti su objašnjene u napomeni 5.9. (a) Skalarni proizvodi  $\langle x_j, x_k \rangle$  za neke j, k i (b) parametri poretka: globalni

parametar poretka (crna linija), parametar poretka za ugao  $\phi$  (crvena linija) i parametar poretka za ugao  $\psi$  (žuta linija).

5.3.2 Roj na  $S^3$  s antihebbovim pravilom učenja U ovom potparagrafu razmatramo model (5.18) s malo modifikovanim

pravilom za dinamiku sinapsa:  $w_{jk} = \epsilon(-q^-_{jqk} + q^-_{kqj}) - \mu w_{jk}$ ,  $\mu > 0$ ,  $j = 1, N$ ,  $k = 1, N$ . (5.21) Kao u potparagrafu 5.3.1, ponovo pretpostavljamo da su početni uslovi  $w_{jk}(0)$  simetrični, osiguravajući da je  $w_{jk}(t) = w_{kj}(t)$  za svako  $t > 0$ . Sistem (5.21) definiše pravilo koje je u izvjesnom smislu suprotno od Hebbovog: interakcija između dva agenta postaje odbojna kada su njihova stanja dovoljno blizu. Antihebbov model (5.18), (5.21) pokazuje raznovrsne konfiguracije ravno- teža i dinamičke režime zavisno od parametra  $\mu$  i broja agenata  $N$ . Iz tog razloga je teže dobiti neke teorijske rezultate.

Počnimo s nekim numeričkim simulacijama za različiti broj agenata  $N$ . Slučaj A:  $N \leq 4$  agenata Ovaj slučaj je veoma jednostavan: roj evoluirao prema konfiguraciji u kojoj sve interakcije  $w_{jk}$  nestanu. Takav razmještaj se postiže kada je sistem vektora  $x_1, \dots, x_N$  ortonormalan. Slika 5.2 ilustrira evoluciju 4 agenta prema ovoj stabilnoj konfiguraciji. Slučaj B:  $N = 5$  agenata Za  $N = 5$  situacija je zapetljanija. Agenti teže da zauzimaju sistem ortonormalnih vektora na  $S^3$ , tako da sve interakcije  $w_{jk}$  nestanu. Međutim, takva konfiguracija nije moguća, s obzirom da dimenzija ambijentalnog prostora nije dovoljna i postoji jedan suvišan agent. Dakle, oni 92 1.0 0.5 0.0 -0.5 -1.0 0 50 100 150 200 0.0 0 1.0 0.8 0.6 0.4 0.2 50

100 150 200 a) b) Slika 5.3: Model s antihebbovim učenjem (5.18), (5.21) s  $N = 5$  agenata. Vrijednost parametara:  $\epsilon = 0.2$ ,  $\mu = 2$ . Početne vrijednosti su objašnjene u napomeni 5.9. (a) skalarni proizvodi  $\langle x_j, x_k \rangle$  za neke  $j, k$  i (b) parametri poretka: globalni parametar poretka (crna linija), parametar poretka za ugao  $\phi$  (crvena linija) i parametar poretka za ugao  $\psi$  (žuta linija). 1.0 1.0 0.5 0.8 0.6 0.0 0.4 -0.5 0.2 -1.0 0 100 200 300 400 500 0.0 0 200 400 600 800 1000 a) b) Slika 5.4:

Model s antihebbovim učenjem (5.18), (5.21) s  $N = 5$  agenata. Vrijednost parametara:  $\epsilon = 0.2$ ,  $\mu = 1$ . Početne vrijednosti su objašnjene u napomeni 5.9. (a) skalarni proizvodi  $\langle x_j, x_k \rangle$  za neke  $j, k$  i (b) parametri poretka: globalni parametar poretka (crna linija), parametar poretka za ugao  $\phi$  (crvena linija) i parametar poretka za ugao  $\psi$  (žuta linija). traže kompromis, a ako interakcije mogu biti dovoljno slabe, taj kompromis postaje stabilan. Na slici 5.3 prikazujemo evoluciju prema stabilnoj konfiguraciji kada je parametar  $\mu$  dovoljno velik. Zapravo, za svako  $\mu > \mu_0 \approx 1.39$  se postiže ista konfiguracija stabilne ravnoteže (s kosinusima svih uglova između vektora koji su jednaki  $\pm 0.25$ ). U cjelini, simulacije sugeriraju da za bilo koje  $\mu > 1.39$  postoji u suštini jedinstvena (do rotacije na  $S^3$  i renumeracije agenata) stabilna ravnoteža. Za  $\mu < 1.39$  ova ravnoteža je nestabilna i cijeli sistem oscilira. Ovo je ilustrirano na slici 5.4. Dakle, dok se  $\mu$

smanjuje, sistem prolazi oscilirajućom bifurkacijom za  $\mu \approx 1.39$ . 93 1.0 1.0 0.5 0.8 0.6 0.0 -0.5 -1.0 0 50 0.4 0.2 0.0 0 100 150 200 a) 50 100 150 200 b) Slika 5.5: Model s antihebbovim učenjem (5.18), (5.21) s  $N = 6$  agenata. Vrijednost parametara:  $\epsilon = 0.2$ ,  $\mu = 2$ . Početne vrijednosti su objašnjene u napomeni 5.9. (a) skalarni proizvodi  $\langle x_j, x_k \rangle$  za neke  $j, k$  i (b) parametri poretka: globalni parametar poretka (crna linija), parametar poretka za ugao  $\phi$  (crvena linija) i parametar poretka za ugao  $\psi$  (žuta linija). 1.0 1.0 0.5 0.8 0.6 0.0 0.4 -0.5 0.2 -1.0 0 100 200 300 400 500 0.0 0 200 400 600 800

1000 a) b) Slika 5.6: Model s antihebbovim učenjem (5.18), (5.21) s  $N = 6$  agenata. Vrijednost parametara:  $\epsilon = 0.2$ ,  $\mu = 1$ . Početne vrijednosti su objašnjene u napomeni 5.9. (a) skalarni proizvodi  $\langle x_j, x_k \rangle$  za neke  $j, k$  i (b) parametri poretka: globalni parametar poretka (crna linija), parametar poretka za ugao  $\phi$  (crvena linija) i parametar poretka za ugao  $\psi$  (žuta linija). Slučaj C:  $N = 6$  agenata Model s 6 agenata ima bifurkacionu vrijednost  $\mu_1$  približno u 1.59. Za  $\mu > \mu_1$  sistem teži stabilnoj ravnoteži. Postoji bitna razlika s prethodnim slučajem: ova ravnoteža nije jedinstvena, a konačna konfiguracija zavisi od početnih uslova. Drugim riječima, sistem s 6 agenata i  $\mu > \mu_1 \approx 1.59$  je multistabilan, s nekoliko (bitno drugačijih) stabilnih ravnoteža. Konvergencija prema jednoj stabilnoj konfiguraciji je prikazana na slici 5.5. Za  $\mu < \mu_1$  sistem pokazuje oscilatorno ponašanje, vidjeti sliku 5.6. Sumirajući gore navedenu diskusiju, rezultati simulacija ukazuju da će agenti postići kompromis ako je parametar  $\mu$  dovoljno velik. Drugim riječima, za dovoljno veliko  $\mu$  postoji ili jedna jedinstvena (modulo 4D rotacije i re- 94 numeracija agenata) stabilna ravnoteža (kada je  $N = 5$ ) ili nekoliko bitno različitih stabilnih ravnoteža (kao i s  $N = 6$  agenata). Sljedeća teorema tvrdi da ovo važi za proizvoljan broj agenata. Teorema 5.4.

Za dovoljno veliko  $\mu$  sistem (5.18) s antihebbovim pravilom učenja (5.21) teži stabilnoj stacionarnoj ravnoteži. Zbog

jednostavnosti ćemo raditi s realnim vektorima  $x_1, \dots, x_N$  i sistemu u obliku (5.19). Prvo, definišimo vektore:  $a_j = w_{jk}x_k, j = 1, \dots, N$ . Vektor  $a_j$  se može tumačiti kao ukupan uticaj na agenta  $j$  od svih drugih agenata. Zamjenjujući  $a_j$  u (5.19) dobivamo:  $\dot{x}_j = a_j - \langle a_j, x_j \rangle x_j$ . Definišimo kinetičku energiju sistema:  $E(t) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N |\dot{x}_j(t)|^2$ . Uzimajući u obzir da su  $x_j$  jedinični vektori, lako je provjeriti da je  $E(t) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \langle \dot{x}_j, a_j \rangle$ . Zapišimo sistem (5.21) s realnim vektorima:  $\sum_{j=1}^N w_{jk} \dot{x}_k = -\langle x_j, x_k \rangle - \mu w_{jk}, \mu > 0$ . (5.22) Za dokaz teoreme nam je potrebna sljedeća lema: Lema 5.4. Za dovoljno veliko  $\mu$  vrijedi:  $\sum_{j=1}^N w_{j2k}(t) \leq E(t) + \epsilon(t), \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N$  gdje je  $\epsilon(t)$  diferencijabilna funkcija koja konvergira nuli kada  $t \rightarrow \infty$ . Dokaz. Prvo ćemo dokazati lemu 5.4. Da pojednostavimo obilježavanje, neka je:  $b(t) = -\langle x_j, x_k \rangle(t), x(t) = w_{jk}(t)$ . Tada je jednačina (5.22) napisana kao  $\dot{x} = b(t) - \mu x$ . 95 Rješenje ove ODJ-e je napisano kako slijedi t

$$x(t) = x(0)e^{-\mu t} + \int_0^t b(s)e^{-\mu(t-s)} ds \quad (23)$$

$= \int_0^t x(0)e^{-\mu t} + b(s)e^{-\mu(t-s)} ds = x(0)e^{-\mu t} + \int_0^t b(s)e^{-\mu(t-s)} ds$  (koristeći integraciju po dijelovima)  $= x(0)e^{-\mu t} + \int_0^t (b(s) - b(0) - b'(s)(t-s))e^{-\mu(t-s)} ds + \int_0^t b(0)e^{-\mu(t-s)} ds + \int_0^t b'(s)(t-s)e^{-\mu(t-s)} ds$ . Množenjem ove jednakosti s  $\mu$  dobivamo  $\mu x(t) - b(t) = -e^{-\mu t} b'(s) + \epsilon(t)$ , gdje  $\epsilon(t)$  označava funkciju koja konvergira nuli kada  $t \rightarrow \infty$ . Uzimajući limes kada  $t \rightarrow \infty$  i koristeći L'Hospitalovo pravilo dobivamo  $b'(t) - \mu x(t) - b(t) \rightarrow -\mu e^{-\mu t} = 0$ , kada  $t \rightarrow \infty$ . Procjena kvadrata gore navedene jednakosti je  $(\mu x(t) - b(t))^2 = b'(t)^2 + \epsilon(t)^2$ . Vraćanjem nazad na originalno obilježavanje imamo  $(\mu x(t) - b(t))^2 = (\mu w_{jk}(t) + \langle x_j, x_k \rangle(t))^2 = 2 w_{jk}(t)^2 + dt d\langle x_j, x_k \rangle(t) + \epsilon(t)^2$ . (2) 96 Sada je lako provjeriti da  $ddt \langle x_j, x_k \rangle(t) \leq cE(t)$  za neku pozitivnu konstantu  $c$ . Zaista: ( ) d 2

$$\langle x_j, x_k \rangle(t) = \langle \dot{x}_j, x_k \rangle + \langle x_j, \dot{x}_k \rangle + 2 \langle \dot{x}_j, x_k \rangle \langle x_j, \dot{x}_k \rangle \leq (dt |\dot{x}_j|^2 + |x_k|^2 + |x_j|^2 |\dot{x}_k|^2) \leq c |\dot{x}_j|^2 + |x_k|^2 + 2|x_j| \cdot |\dot{x}_k| \leq c |\dot{x}_j|^2 \quad (9)$$

$2 = cE(t)$ . Dakle,  $\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N w_{j2k} = \mu \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N (dt \langle x_j, x_k \rangle(t) + \epsilon(t)) \leq \mu \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N (E(t) + \epsilon(t))$ . Dokaz. Da bi se dokazao teorem 5.4 razmotrimo sljedeću funkciju:  $N F(t) = \langle x_j, a_j \rangle + \mu \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N w_{j2k}$ . Deriviranjem  $F(t)$  duž trajektorija od (5.19), (5.22) se dobija:  $dF(t) = \langle \dot{x}_j, a_j \rangle + \langle x_j, \dot{a}_j \rangle + \mu \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N w_{jk} \dot{w}_{jk} = dt \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \langle \dot{x}_j, a_j \rangle + \langle x_j, w_{jk} \dot{x}_k \rangle + \langle x_j, w_{jk} \dot{x}_k \rangle - \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \sum_{m=1}^N \mu w_{jk} \langle x_j, x_k \rangle - \mu \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \sum_{m=1}^N \langle \dot{x}_j, a_j \rangle + \langle w_{jk} \dot{x}_j, x_k \rangle + \langle w_{jk} \dot{x}_j, x_k \rangle - \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \sum_{m=1}^N \mu \langle w_{jk} \dot{x}_j, x_k \rangle - \mu \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \sum_{m=1}^N w_{jk} \langle x_j, x_k \rangle - \mu \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \sum_{m=1}^N w_{jk} \langle x_j, x_k \rangle = 4E(t) - \langle x_j, x_k \rangle^2 - \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \sum_{m=1}^N 2\mu w_{jk} \langle x_j, x_k \rangle - \mu \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \sum_{m=1}^N w_{jk} \langle x_j, x_k \rangle = 4E(t) - (-\langle x_j, x_k \rangle - \mu w_{jk})^2 = 4E(t) - w_{j2k}^2$ . Kinetička energija  $E(t)$  je nenegativna funkcija. Primjenjujući lemu 5.4 dobivamo da  $ddt F(t) \geq 3E(t) + \epsilon(t) \geq \epsilon(t)$  gdje  $\epsilon(t) \rightarrow 0$  kada  $t \rightarrow \infty$ . Dalje, funkcija  $F(t)$  je ograničena, jer  $|F(t)| \leq |\langle x_j, a_j \rangle| + \mu \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N |w_{jk} \langle x_j, x_k \rangle| + \mu \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N |w_{j2k}| \leq (|w_{jk}| + \mu w_{j2k}) \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \sum_{m=1}^N$  ifunkcijewjk(t)suograničenekaorješenjeod(5.22)zamu>0. Otuda,  $F'(t) \geq \epsilon(t)$  i  $|F(t)| < c$ , te zaključujemo da  $F'(t) \rightarrow 0$  kada  $t \rightarrow \infty$ . Sadaimamoda3E(t)+ε(t)≤F'(t)→0kad t→∞iE(t)≥0. Dakle,  $E(t) \rightarrow 0$  i sistem teži stacionarnoj ravnoteži kada  $t \rightarrow \infty$ . \*

5.3.3 Primjene i vizualizacija Kao što je naglašeno u uvodu, geometrija sfere  $S^3$  je čini veoma pogodnim osnovnim prostorom za izradu algoritama konsenzusa i koordinacije. Ovo ukazuje na to da je u mnogim slučajevima korisno konstruisati algoritme na rotacijskim grupama  $SO(3)$  i  $SO(4)$  koristeći grupne homomorfizme od  $S^3$ . Ovo se postiže pokretanjem simulacija na  $S^3$  i preslikavanjem trajektorija svih agenata iz  $S^3$  na  $SO(3)$  (i od  $S^3 \times S^3$  na  $SO(4)$ ). Poznato

je da u nekim situacijama ovaj pristup može uzrokovati neželjene efekte. Na primjer, bipolarna konfiguracija na  $S^3$  odgovara konsenzusu na  $SO(3)$ . 98 U dodatnim materijalima rada [26] se mogu vidjeti nekoliko kratkih video zapisa koji ilustruju različite dinamičke režime u rojevima s 5 i 6 agenata s antihebbovim pravilom učenja (5.21). Ovi video zapisi se dobijaju preslikavanjem trajektorija iz  $S^3$  na  $SO(3)$ . Prva dva video zapisa ilustruju konvergenciju prema konfiguracijama ravnoteže s 5 i 6 agenata respektivno. Vrijednost parametra u obje simulacije je  $\mu = 2$ . Dalje, ilustrujemo oscilatorne režime koji se javljaju kada je  $\mu$  ispod praga bifurkacije. Treći i četvrti video zapisi pokazuju oscilatorno ponašanje u rojevima s 5 i 6 agenata respektivno. Vrijednost parametra je podešena na  $\mu = 1$ . 99 Glava 6

Zaključak Nakon pionirskog rada Kuramoto od 1975., mnogobrojna istraživanja velikih populacija povezanih oscilatora su dovela do izvanrednog napretka [52]. Bolje objašnjenje dinamike i kolektivnog ponašanja povezanih oscilatora otkriva neočekivane veze s nekim važnim matematičkim teorijama. U drugoj glavi smo predstavili određene relacije između direkcione statistike i kolektivne dinamike povezanih oscilatora. Pokazali smo da je Kato-Jones raspodjela, zajedno s umotanom Cauchyjevom i von Misesovom raspodjelom relevantna u proučavanju povezanih oscilatora. Pretpostavili smo da bi se ove raspodjele mogle pojaviti u ćelijskom ciklusu razmnožavanja i predložili da se to eksperimentalno provjeri. Nadalje, demonstrirali smo kako se unimodalna simetrična raspodjela može transformirati u bimodalnu i asimetričnu pod efektom veze srednjeg polja. Precizirali smo koji efekti u vezi mogu biti odgovorni za promjene u modalnosti i asimetričnosti. Zatim, koristeći analizu iz rada [50], objasnili smo neke moguće dugotrajne evolucione scenarije fazne raspodjele koji su pod uticajem srednjeg polja. U ovoj disertaciji se koristi bogata matematička teorija vezana za Möbiusove transformacije, uključujući klasične koncepte kompleksne analize, projektivne geometrije i algebre. Koristeći ove matematičke alate, u trećoj glavi smo predložili konceptualni okvir za karakterizaciju kompleksnih mreža tretirajući je kao mrežu povezanih oscilatora (gdje su čvorovi oscilatori, a grane su veze između oscilatora). Svakoj kompleksnoj mreži  $N$  smo pridružili dvije slučajne promjenljive  $X_N$  i  $Y_N$ . Njihove raspodjele sadrže važne informacije o samoj mreži  $N$  i njenim podmrežama. Mi ne znamo te raspodjele, ali možemo koristiti Monte Carlo metod za generaciju empirijskih funkcija gustoće vjerovatnosti. Nadalje, pokazali smo da grupa Möbiusovih transformacija može poslužiti kao adekvatan matematički objekat za opisivanje srednjih polja u mrežama povezanih oscilatora i detekciji zajednica u kompleksnim mrežama. U četvrtoj glavi uvodimo neabelov model Kuramoto (4.4) identičnih 100 pštenih oscilatora na sferi  $S^3$  s globalnom vezom. Jednačine u ovom modelu su kvaternionske Riccatijeve diferencijalne jednačine (ili, ekvivalentno, matricne Riccatijeve diferencijalne jednačine na grupi  $SU(2)$ ). Tada populacija evoluira pod dejstvom grupe Möbiusovih transformacija koje čuvaju  $S^3$ . Ovo je teorijsko objašnjenje za niskodimenziono ponašanje u modelu. Vjerujemo da značajna vrijednost ovog modela leži u potencijalnim primjenama u matematici, mašinskom učenju, obradi podataka, robotici, itd. Za različite promjene potrebno je razmotriti različite varijacije modela bez pretpostavke da je veza globalna i/ili da su uopšteni oscilatori identični. U istoj glavi smo predložili novi algoritam za klasteriranje podataka koji je zasnovan na sinkronizaciji u neabelovim modelima Kuramoto. Predstavili smo metod koji odgovara modelu na  $SU(2)$  pod pretpostavkom da se podaci predstavljaju s ne više od 6 atributa. Za podatke čija je dimenzija veća od 6 se možda može koristiti model na  $SU(n)$ . Ova ideja je pogodna za hijerarhijsko klasteriranje jer je zasnovana na hijerarhijskoj prirodi procesa sinkronizacije. Također, naš pristup se može koristiti za klasteriranje skupa podataka koji se sastoji od objekata označenih vektorom atributa zajedno s relacionim odnosima, koji predstavljaju (eventualno višeslojnu) mrežu. U petoj glavi smo proučavali konsenzus i antikonsenzus na 3-sferi kao zadatke globalne optimizacije. Odgovarajući algoritam gradijentnog spуска je neabelov model Kuramoto na  $S^3$ . Ovo zapažanje nam je otvorilo malo drugačiji uvid u neke prethodne rezultate i također omogućilo da dokažemo neke nove rezultate u vezi s konsenzusom i balansiranjem nad kompletnim grafom. Na ovaj način smo popunili neke

praznine u postojećoj teoriji. Ko- nkretno, dokazali smo da će roj na  $S^3$  pod protokolom antikonsenzusa ko- nvergirati prema balansiranoj konfiguraciji. Štaviše, ova balansirana konfi- guracija je jedinstveno (do rotacije na  $S^3$ ) određena početnom raspodjelom agenata. Ključna pretpostavka je odsustvo većinskog klastera u početnoj ra- spodjeli agenata. Ovo otkriva neočekivanu relaciju s konstrukcijom Douady- -Earlea ([29]) koja se široko istražuje i koristi u ovoj glavi. U nastavku iste glave smo uveli i analizirali nekoliko modela dinamike roja na sferi  $S^3$  s adaptivnim (zavisnim o stanju) interakcijama između agenata. Jednačine koje opisuju dinamiku interakcija su varijacije klasičnog Hebb- vog principa iz nauke o neuronima. Proučavali smo asimptotsko ponašanje u modelima s različitim realizacijama Hebbvog i antihebbvog pravila učenja. Roj s Hebbovim pravilom i nenegativnim (privlačnim) interakcijama evolu- ira prema konsenzusu. Ako Hebbovo pravilo dozvoljava privlačne i odbojne interakcije, roj konvergira prema bipolarnoj konfiguraciji. Najinteresantniji je model s antihebbovim pravilom učenja s privlačnim i odbojnim interakci- jama. Ovaj model prikazuje bogat izbor dinamičkih režima i stacionarnih formacija, koji zavise od broja agenata i parametara sistema. Dokazali smo [10] da model s takvim antihebbovim pravilom evoluirá prema stabilnoj stacio- narnoj konfiguraciji ako je parametar sistema iznad određenog praga bifur- kacije. Naglasimo da većina teorijskih rezultata u ovoj glavi vrijede za bilo koju sferu  $S_n$ , a ne isključivo za  $S^3$ . Fokusirali smo se na  $S^3$ , jer je ovaj konkretan slučaj od posebnog značaja u primjenama.

102 Literatura [1] Abrams, D.M., Mirollo, R., Strogatz, S.H., Wiley, D.A.: Solvable model for chimera states of coupled oscillators. *Physical Review Letters* 101(8), 084103 (2008) [2] Acebrón, J. A., Bonilla, L. L., Vicente, C. J. P., Ritort, F., Spigler, R.: The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization pheno- mena. *Reviews of Modern Physics* 77(1), 137 (2005) [3] Allefeld, C., Kurths, J.: Testing for Phase Synchronization. *Internatio- nal Journal of Bifurcation and Chaos* 14(2), 405–416 (2004) [4] Amdaoud, M., Vallade, M., Weiss-Schaber, C., Mihalcescu, I.: Cya- nobacterial clock, a stable phase oscillator with negligible intercellular coupling. *Proceedings of the National Academy of Sciences* 104(17), 7051–7056 (2007) [5] Antonelli, P., Marcati, P.: A model of synchronization over quantum networks. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 50(31), 315101 (2017) [6] Arenas, A., Díaz- Guilera, A., Pérez-Vicente, C.J.: Synchronization re- veals topological scales in complex networks. *Physical Review Letters* 96(11), 114102 (2006) [7] Arenas, A., Díaz-Guilera, A., Pérez-Vicente, C.J.: Synchronization pro- cesses in complex networks. *Physica D: Nonlinear Phenomena* 224(1), 27–34 (2006) [8] Arenas, A., Díaz-Guilera, A., Kurths, J., Moreno, Y., Zhou, C.: Sy- nchronization in complex networks. *Physics Reports* 469(3), 93–153 (2008) [9] Arnaudon, M., Barbaresco, F., Yang, L.: Medians and means in Rie- mannian geometry: existence, uniqueness and computation. *Matrix Info- rmation Geometry*, 169–197 (2013) 103 [10] Bag, B.C., Petrosyan, K.G., Hu, C.-K.: Influence of noise on the sy- nchronization of the stochastic Kuramoto model. *Physical Review E* 76(5), 056210 (2007) [11] Balanov, A. G., Janson N. B., Postnov, D. E., Sosnovtseva, O. V.: *Synchronization: From Simple to Complex*. Springer, Berlin (2009) [12] Barabási, A.- L.: *Network Science*. Cambridge University Press, Cambri- dge (2016) [13] Boccaletti, S., Ivanchenko, M., Latora, V., Pluchino, A., Rapisarda, A.: Detecting complex network modularity by dynamical clustering. *Physical Review E* 75(4), 045102 (2007) [14] Buchstaber, V. M., Karpov, O. V., Tertychnyi, S. I.: A system on a torus modelling the dynamics of a Josephson junction. *Russian Mathematical Surveys* 67(1), 178–180 (2012) [15] Cadieu, C. F., Koepsell, K.: Phase coupling estimation from multivariate phase statistics. *Neural computation* 22(12), 3107–3126 (2010) [16] Campos, J.: Möbius transformations and periodic solutions of co- mplex Riccati equations. *Bulletin of the London Mathematical Society* 29(2), 205–215 (1997) [17] Canolty, R. T., Ganguly, K., Kennerley, S. W., Cadieu, C. F., Koepsell, K., Wallis, J. D., Carmena, J. M.: Oscillatory phase coupling coordina- tes anatomically dispersed functional cell assemblies. *Proceedings of the National Academy of Sciences* 107(40), 17356–17361 (2010) [18] Caponigro, M., Lai, A. C., Piccoli, B.: A nonlinear model of opinion formation on the sphere. *Discrete & Continuous Dynamical Systems-A* 35(9), 4241–

4268 (2015) [19] Chaturvedi, N.A., Sanyal, A.K., McClamroch, N.H.: Rigid-body attitude control. *IEEE Control Systems* 31(3), 30–51 (2011) [20] Chen, B., Engelbrecht, J. R., Mirollo, R.: Hyperbolic geometry of Kuramoto oscillator networks. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 50(35), 355101 (2017) [21] Chi, D., Choi, S.-H., Ha, S.-Y.: Emergent behaviors of a holonomic particle system on a sphere. *Journal of Mathematical Physics* 55(5), 052703 (2014) 104 [22] Choi, M.Y., Kim, H.J., Kim, D., Hong, H.: Synchronization in a system of globally coupled oscillators with time delay. *Physical Review E* 61(1), 371 (2000) [23] Choi, S.-H., Ha, S.-Y.: Large-time dynamics of the asymptotic Lohe model with a small time-delay. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 48(42), 425101 (2015) [24] Choi, S.-H., Ha, S.-Y.: Time-delayed interactions and synchronization of identical Lohe oscillators. *Quarterly of Applied Mathematics* 74(2), 297–319 (2016) [25] Central Intelligence Agency: The World Factbook. [Online]. Available: <https://www.cia.gov/library/publications/the-world-factbook> (2018, Dec.) [26] Crnkčić, A., Jaćimović, V.: Swarms on the 3-sphere with adaptive synapses: Hebbian and anti-Hebbian learning rule. *Systems & Control Letters* 122, 32–38 (2018) [27] Crnkčić, A., Jaćimović, V.: Consensus and balancing on the three-sphere. *Journal of Global Optimization*, <https://doi.org/10.1007/s10898-018-0723-1> (2018) [28] de Lucas, J., Tobolski, M., Vilariño, S.: Geometry of Riccati equations over normed division algebras. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 440(1), 394–414 (2016) [29] Douady, A., Earle, C. J.: Conformally natural extension of homeomorphisms of the circle. *Acta Mathematica* 157(1), 23–48 (1986) [30] Engelbrecht, J. R., Mirollo, R.: Classification of attractors for systems of identical coupled Kuramoto oscillators. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 24(1), 013114 (2014) [31] Fisher, N. I.: *Statistical analysis of circular data*. Cambridge University Press, Cambridge (1993) [32] Fortunato, S.: Community detection in graphs. *Physics Reports* 486(3), 75–174 (2010) [33] Frenkel, I., Libine, M.: Quaternionic analysis, representation theory and physics. *Advances in Mathematics* 218(6), 1806–1877 (2008) 105 [34] Golomb, D., Hansel, D., Shraiman, B., Sompolinsky, H.: Clustering in globally coupled phase oscillators. *Physical Review A* 45(6), 3516 (1992) [35] Gwynne, E., Libine, M.: On a quaternionic analogue of the cross-ratio. *Advances in Applied Clifford Algebras* 22(4), 1041–1053 (2012) [36] Ha, S.-Y., Ko, D., Park, J., Zhang, X.: Collective synchronization of classical and quantum oscillators. *EMS Surveys in Mathematical Sciences* 3(2), 209–267 (2016) [37] Ha, S.-Y., Noh, S. E., Park, J.: Synchronization of Kuramoto oscillators with adaptive couplings. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems* 15(1), 162–194 (2016) [38] Ha, S.-Y., Ko, D., Ryoo, S. W.: Emergent dynamics of a generalized Lohe model on some class of Lie groups. *Journal of Statistical Physics* 168(1), 171–207 (2017) [39] Hartley, R., Trunpf, J., Dai, Y., Li, H.: Rotation averaging. *International Journal of Computer Vision* 103(3), 267–305 (2013) [40] Hill, N.A., Häder, D.-P.: A biased random walk model for the trajectories of swimming micro-organisms. *Journal of Theoretical Biology* 186(4), 503–526 (1997) [41] Hölzel, R. W., Krischer, K.: Stability and long term behavior of a Hebbian network of Kuramoto oscillators. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems* 14(1), 188–201 (2015) [42] Huygens, C.: Letters to de Sluse, (letters; no. 1333 of 24 February 1665, no. 1335 of 26 February 1665, no. 1345 of 6 March 1665) (*Societe Hollandaise Des Sciences, Martinus Nijho, 1895*). [43] Jacques, J., Preda, C.: Model-based clustering for multivariate functional data. *Computational Statistics & Data Analysis* 71, 92–106 (2014) [44] Jacques, J., Preda C.: Clustering multivariate functional data. In: *COMPSTAT 2012*, 353–366 (2012) [45] Jaćimović, V.: Computing the Douady–Earle extension using Kuramoto oscillators. *Analysis and Mathematical Physics*, 1–7 (2018) [46] Jadbabaie, A., Lin, J., Morse, A. S.: Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules. *IEEE Transactions on Automatic Control* 48(6), 988–1001 (2003) 106 [47] Jain, A. K., Murty, M. N., Flynn, P. J.: Data clustering: a review. *ACM Computing Surveys (CSUR)* 31(3), 264–323 (1999) [48] Jain, A. K.: Data clustering: 50 years beyond K-means. *Pattern Recognition Letters* 31(8), 651–666 (2010) [49] Karcher, H.: Riemannian center of mass and mollifier smoothing. *Communications on pure and applied mathematics* 30(5), 509–541 (1977) [50] Kato, S.,

Jones, M. C.: A family of distributions on the circle with links to, and applications arising from, Möbius transformation. *Journal of the American Statistical Association* 105(489), 249–262 (2010) [51] Kato, S., McCullagh, P.: Conformal mapping for multivariate Cauchy families. arXiv preprint arXiv:1510.07679, (2015) [52] Kuramoto, Y.: Self-entrainment of a population of coupled nonlinear oscillators. In: Proc. International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics, 420–422 (1975) [53] Lee, W. S., Ott, E., Antonsen, T. M.: Large coupled oscillator systems with heterogeneous interaction delays. *Physical Review Letters* 103(4), 044101 (2009) [54] Li, D., Leyva, I., Almendral, J.A., Sendina-Nadal, I., Buldú, J.M., Havlin, S., Boccaletti, S.: Synchronization interfaces and overlapping communities in complex networks. *Physical Review Letters* 101(16), 168701 (2008) [55] Li, W., Spong, M. W.: Unified cooperative control of multiple agents on a sphere for different spherical patterns. *IEEE Transactions on Automatic Control* 59(5), 1283–1289 (2014) [56] Li, W.: Collective motion of swarming agents evolving on a sphere manifold: A fundamental framework and characterization. *Scientific Reports* 5, 13603 (2015) [57] Lohe, M. A.: Non-Abelian Kuramoto models and synchronization. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 42(39), 395101 (2009) [58] Lohe, M. A.: Quantum synchronization over quantum networks. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 43(46), 465301 (2010) [59] Lou, X., Suykens, J.A.K.: Finding communities in weighted networks through synchronization. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 21(4), 043116 (2011) [60] Mardia, K. V., Jupp, P. E.: *Directional statistics*. John Wiley & Sons, New York (2009) [61] Markdahl, J., Gonçalves, J.: Global convergence properties of a consensus protocol on the n-sphere. In: Proc. 55th IEEE Conf. Decision and Control, pp. 3487–3492 (2016) [62] Markdahl, J., Thunberg, J., Gonçalves, J.: Almost global consensus on the n-sphere. *IEEE Transactions on Automatic Control* 63(6), 1664–1675 (2018) [63] Marvel, S.A., Mirollo, R.E., Strogatz, S.H.: Identical phase oscillators with global sinusoidal coupling evolve by Möbius group action. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 19(4), 043104 (2009) [64] McCullagh, P.: Möbius transformation and Cauchy parameter estimation. *The Annals of Statistics* 24(2), 787–808 (1996) [65] Miyano, T., Tsutsui, T.: Data synchronization in a network of coupled phase oscillators. *Physical Review Letters* 98(2), 024102 (2007) [66] Morgan, D. O.: *The cell cycle: principles of control*. New Science Press, London (2009) [67] Nedic, A., Ozdaglar, A., Parrilo, P.A.: Constrained consensus and optimization in multi-agent networks. *IEEE Transactions on Automatic Control* 55(4), 922–938 (2010) [68] Needham, T.: *Visual complex analysis*. Clarendon Press, Oxford (2002) [69] Nichols, S., Wiesenfeld, K.: Ubiquitous neutral stability of splay-phase states. *Physical Review A* 45(12), 8430 (1992) [70] Novikov, A. V., Benderskaya, E. N.: Oscillatory neural networks based on the Kuramoto model for cluster analysis. *Pattern Recognition and Image Analysis* 24(3), 365–371 (2014) [71] Oh, E., Rho, K., Hong, H., Kahng, B.: Modular synchronization in complex networks. *Physical Review E* 72(4), 047101 (2005) [72] Olfati-Saber, R.: Swarms on sphere: A programmable swarm with synchronous behaviors like oscillator networks. In: Proc. 45th IEEE Conf. Decision and Control, 5060–5066 (2006) [73] Olfati-Saber, R., Fax, J.A., Murray, R.M.: Consensus and cooperation in networked multi-agent systems. *Proceedings of the IEEE* 95(1), 215–233 (2007) [74] Ott, E., Antonsen, T.M.: Low dimensional behavior of large systems of globally coupled oscillators. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 18(3), 037113 (2008) [75] Ott, E., Antonsen, T.M.: Long time evolution of phase oscillator systems. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 19(2), 023117 (2009) [76] Paley, D.A.: Stabilization of collective motion on a sphere. *Automatica* 45(1), 212–216 (2009) [77] Panaggio, M.J., Abrams, D.M.: Chimera states: coexistence of coherence and incoherence in networks of coupled oscillators. *Nonlinearity* 28(3), R67 (2015) [78] Pikovsky, A., Rosenblum, M., Kurths, J.: *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences*. Cambridge University Press, Cambridge (2003) [79] Pikovsky, A., Rosenblum, M.: Partially integrable dynamics of hierarchical populations of coupled oscillators. *Physical Review Letters* 101(26), 264103 (2008) [80] Pikovsky, A., Rosenblum, M.: Dynamics of

heterogeneous oscillator ensembles in terms of collective variables. *Physica D: Nonlinear Phenomena* 240(9), 872–881 (2011) [81] Ramsay, J. O., Silverman, B. W.: *Functional data analysis*. Springer, New York (2005) [82] Risken, H.: *The Fokker-Planck equation: Methods of Solution and Applications*. Springer, Berlin (1989) [83] Rodrigues, F. A., Peron, T. K. D. M., Ji, P., Kurths, J.: The Kuramoto model in complex networks. *Physics Reports* 610, 1–98 (2016) [84] Rudin, W.: *Real and complex analysis*. McGraw-Hill, New York (1986) 109 [85] Sakaguchi, H., Kuramoto, Y.: A soluble active rotator model showing phase transitions via mutual entrainment. *Progress of Theoretical Physics* 76(3), 576–581 (1986) [86] Sarlette, A., Sepulchre, R., Leonard, N.E.: Autonomous rigid body attitude synchronization. *Automatica* 45(2), 572–577 (2009) [87] Sarlette, A., Bonnabel, S., Sepulchre, R.: Coordinated motion design on Lie groups. *IEEE Transactions on Automatic Control* 55(5), 1047–1058 (2010) [88] Sarlette, A., Sepulchre, R.: Synchronization on the circle. arXiv preprint arXiv:0901.2408 (2009) [89] Sarlette, A., Sepulchre, R.: Consensus optimization on manifolds. *SIAM Journal on Control and Optimization* 48(1), 56–76 (2009) [90] Sarlette, A.: *Geometry and symmetries in coordination control*. Ph.D. thesis, Université de Liège (2009) [91] Schwerdtfeger, H.: *Geometry of complex numbers*. Dover, New York (1989) [92] Sepulchre, R.: Consensus on nonlinear spaces. *Annual Reviews in Control* 35(1), 56–64 (2011) [93] Sepulchre, R., Paley, D. A., Leonard, N. E.: Stabilization of planar collective motion: All-to-all communication. *IEEE Transactions on Automatic Control* 52(5), 811–824 (2007) [94] Shao, J., He, X., Böhm, C., Yang, Q., Plant, C.: Synchronization-inspired partitioning and hierarchical clustering. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering* 25(4), 893–905 (2013) [95] Strogatz, S.H.: From Kuramoto to Crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators. *Physica D: Nonlinear Phenomena* 143(1), 1–20 (2000) [96] Timms, L., English, L. Q.: Synchronization in phase-coupled Kuramoto oscillator networks with axonal delay and synaptic plasticity. *Physical Review E* 89(3), 032906 (2014) [97] Tsang, K. Y., Mirollo, R. E., Strogatz, S. H., Wiesenfeld, K.: Dynamics of a globally coupled oscillator array. *Physica D: Nonlinear Phenomena* 48(1), 102–112 (1991) 110 [98] Tsang, K. Y., Schwartz, I. B.: Interhyperhedral diffusion in Josephson-junction arrays. *Physical Review Letters* 68(15), 2265 (1992) [99] Vaxman, A., Müller, C., Weber, O.: Conformal mesh deformations with Möbius transformations. *ACM Transactions on Graphics (TOG)* 34(4), 55 (2015) [100] Watanabe, S., Strogatz, S.H.: Integrability of a globally coupled oscillator array. *Physical Review Letters* 70(16), 2391 (1993) [101] Watanabe, S., Strogatz, S.H.: Constants of motion for superconducting Josephson arrays. *Physica D: Nonlinear Phenomena* 74(3), 197–253 (1994) [102] Watts, D.J., Strogatz, S.H.: Collective dynamics of “small-world” networks. *Nature* 393(6684), 440–442 (1998) [103] Wikipedia contributors: Iris flower data set. [Online]. Available: [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Iris\\_flower\\_data\\_set&oldid=815019107](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Iris_flower_data_set&oldid=815019107) (2018, Dec.) [104] Wilczyński, P.: Quaternionic-valued ordinary differential equations. The Riccati equation. *Journal of Differential Equations* 247(7), 2163–2187 (2009) [105] Winfree, A.T.: *The geometry of biological time*. Springer-Verlag, New York (1980) [106] Yamamoto, M.: Clustering of functional data in a low-dimensional subspace. *Advances in Data Analysis and Classification* 6(3), 219–247 (2012) [107] Yeung, M.K.S., Strogatz, S. H.: Time delay in the Kuramoto model of coupled oscillators. *Physical Review Letters* 82(3), 648 (1999) [108] Żoła,dek, H.: Classification of diffeomorphisms of  $S^4$  induced by quaternionic Riccati equations with periodic coefficients. *Topological Methods in Nonlinear Analysis* 33(2), 205–215 (2009) 111 Biografija Aladin Crnkić je rođen 23.04.1987. godine u Bihaću, Bosna i Hercegovina. Osnovnu školu i gimnaziju je završio u Bihaću s odličnim uspjehom. U osnovnoj i srednjoj školi učestvovao je na brojnim kantonalnim i federalnim takmičenjima iz oblasti matematike i fizike gdje je ostvarivao zapažene rezultate. Pedagoški fakultet Univerziteta u Bihaću upisuje 2005. godine, smjer Matematika i informatika. Diplomski studij završava 2009. godine sa prosječnom ocjenom 8.86. U toku studija dobivao je mnoge pohvale i priznanja, a najveće je priznanje od Federalnog ministarstva nauke i obrazovanja. U aprilu 2010. godine upisuje magistarske studije na Filozofskom fakultetu



Univerziteta u Zenici, smjer Matematika i informatika. Magistarski studij završava 2013. godine s prosječnom ocjenom 8.86. Magistarski rad pod nazivom "Dinamika monotonih i antimonotonih racionalnih sistema diferentnih jednačija" je odbranio pod mentorstvom prof. dr Dževada Burgića. Od 2013. godine je student doktorskih studija na Prirodno-matematičkom fakultetu, smjer Matematika gdje počinje saradnju s prof. dr Vladimirom Jaćimovićem. Na Tehničkom fakultetu Univerziteta u Bihaću zaposlen je od oktobra 2011. godine kao saradnik u nastavi. Izvodio je vježbe iz predmeta Matematika I, Matematika II, Matematika III, Operacijska istraživanja i Teorija vjerovatnoće i statistike. 112 Izjava o autortstvu Potpisan Aladin Crnkić Broj indeksa/upisa: 1/2013 Izjavljujem da je doktorska disertacija pod naslovom "Kolektivno ponašanje i samo-organizacija u mrežama povezanih oscilatora" • rezultat sopstvenog istraživačkog rada, • da predložena disertacija ni u cjelini ni u djelovima nije bila predložena za dobijanje bilo koje diplome prema studijskim programima drugih ustanova visokog obrazovanja, • da su rezultati korektno navedeni, i • da nisam povrijedio autorska i druga prava intelektualne svojine koja pripadaju trećim licima. Potpis doktoranta U Podgorici, Izjava o istovjetnosti štampane i elektronske verzije dokorskog rada Ime i prezime autora: Aladin Crnkić Broj indeksa/upisa: 1/2013 Studijski program: Matematika Naslov rada: "Kolektivno ponašanje i samoorganizacija u mrežama poveza- nih oscilatora" Mentor: prof. dr Vladimir Jaćimović Potpisan Aladin Crnkić Izjavljujem da je štampana verzija mog dokorskog rada istovjetna elektro- nskoj verziji koju sam predao za objavljivanje u Digitalni arhiv Univerziteta Crne Gore. Istovremeno izjavljujem da dozvoljavam objavljivanje mojih ličnih podataka u vezi sa dobijanjem akademskog naziva doktora nauka, odnosno zvanja do- ktora umjetnosti, kao što su ime i prezime, godina i mjesto rođenja, naziv disertacije i datum odbrane rada. Potpis doktoranta U Podgorici, Izjava o korištenju Ovlašćujem Univerzitetsku biblioteku da u Digitalni arhiv Univerziteta Crne Gore pohrani moju doktorsku disertaciju pod naslovom: "Kolektivno po- našanje i samoorganizacija u mrežama povezanih oscilatora", koja je moje autorsko djelo. Disertaciju sa svim priložima predao sam u elektronskom formatu pogodnom za trajno arhiviranje. Moju doktorsku disertaciju pohranjenu u Digitalni arhiv Univerziteta Crne Gore mogu da koriste svi koji poštuju odredbe sadržane u odabranom tipu licence Kreativne zajednice (Creative Commons) za koju sam se odlučio. 1. Autorstvo 2. Autorstvo – nekomercijalno 3. Autorstvo – nekomercijalno – bez prerade 4. Autorstvo – nekomercijalno – dijeliti pod istim uslovima 5. Autorstvo – bez prerade 6. Autorstvo – dijeliti pod istim uslovima Potpis doktoranta U Podgorici,

---

**sources:**


---

1

162 words / 1% - Crossref

[Vladimir Jaćimović, Aladin Crnkić. "Collective motions of globally coupled oscillators and some probability distributions on circle", Physics Letters A, 2017](#)

2

140 words / &lt; 1% match - Crossref

[Vladimir Jaćimović, Aladin Crnkić. "Modelling mean fields in networks of coupled oscillators", Journal of Geometry and Physics, 2018](#)

3

64 words / &lt; 1% match - Crossref

[Aladin Crnkić, Vladimir Jaćimović. "Consensus and balancing on the three-sphere", Journal of Global Optimization, 2018](#)

4

36 words / &lt; 1% match - Crossref

[Aladin Crnkić, Vladimir Jaćimović. "Swarms on the 3-sphere with adaptive synapses: Hebbian and anti-Hebbian learning rule", Systems & Control Letters, 2018](#)

- 
- 5 31 words / < 1% match - Internet from 07-Dec-2017 12:00AM  
[izt.ciens.ucv.ve](http://izt.ciens.ucv.ve)
- 
- 6 30 words / < 1% match - Internet from 02-Dec-2018 12:00AM  
[www.ucg.ac.me](http://www.ucg.ac.me)
- 
- 7 30 words / < 1% match - Crossref  
[Aladin Crnkčić, Vladimir Jaćimović. "Data clustering based on quantum synchronization", Natural Computing, 2018](#)
- 
- 8 24 words / < 1% match - Crossref  
[Shogo Kato. "A Family of Distributions on the Circle With Links to, and Applications Arising From, Möbius Transformation", Journal of the American Statistical Association, 03/2010](#)
- 
- 9 23 words / < 1% match - Crossref  
[Arutyunov, G.. "On AdS<sup>5</sup> string S-matrix", Physics Letters B, 20060810](#)
- 
- 10 17 words / < 1% match - Publications  
[Acebron, Juan A. Bonilla, L.L. Vicente, . "The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena.", Reviews of Modern Physics, Jan 2005 Issue](#)
- 
- 11 15 words / < 1% match - Internet from 14-Jul-2018 12:00AM  
[www.ucg.ac.me](http://www.ucg.ac.me)
- 
- 12 13 words / < 1% match - Internet from 21-Mar-2014 12:00AM  
[cbcg.me](http://cbcg.me)
- 
- 13 12 words / < 1% match - Internet from 17-Jan-2010 12:00AM  
[www.phys.uu.nl](http://www.phys.uu.nl)
- 
- 14 12 words / < 1% match - Internet from 18-Oct-2018 12:00AM  
[repositorio.ufpe.br](http://repositorio.ufpe.br)
- 
- 15 11 words / < 1% match - Internet from 10-Sep-2018 12:00AM  
[link.springer.com](http://link.springer.com)
- 
- 16 11 words / < 1% match - Internet from 14-Jun-2009 12:00AM  
[www.mccme.ru](http://www.mccme.ru)
- 
- 17 11 words / < 1% match - Internet from 16-Nov-2018 12:00AM  
[paduaresearch.cab.unipd.it](http://paduaresearch.cab.unipd.it)
- 
- 18 11 words / < 1% match - Internet from 27-Jul-2018 12:00AM  
[publications.hse.ru](http://publications.hse.ru)
-

19

11 words / &lt; 1% match - Crossref

[Vladimir Jaćimović, Aladin Crnkić. "Characterizing complex networks through statistics of Möbius transformations", Physica D: Nonlinear Phenomena, 2017](#)

---

20

10 words / &lt; 1% match - Internet from 07-Aug-2018 12:00AM

[aip.scitation.org](http://aip.scitation.org)

---

21

10 words / &lt; 1% match - Internet from 19-Jul-2017 12:00AM

[www.monkstk.ba](http://www.monkstk.ba)

---

22

10 words / &lt; 1% match - Internet from 11-Jul-2018 12:00AM

[media.neliti.com](http://media.neliti.com)

---

23

10 words / &lt; 1% match - Internet from 16-Nov-2018 12:00AM

[es.scribd.com](http://es.scribd.com)

---